АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

531—1004

*

№ 2 **1953**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
Основания математики и математическая логика 5
Теория чисел 7
Алгебра 15
Многочлены и линейная алгебра 17
Группы 25
Поля, кольца и структуры 31
Топология 37
Теория функций действительного переменного 45
Приближение функций полиномами и их обобщениями 54
Интегральные преобразования функций . 67
Теория функций комплексного переменного . 71
Дифференциальные уравнения 97
Обыкновенные дифференциальные уравнения 97
Уравнения в частных производных . . . 119
Интегральные уравнения 131
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 137
Специальные функции 142
Числовые ряды 145
Функциональный анализ 151
Теория вероятностей 167
Математическая статистика 170
Теоретико-вероятностные и статистические методы в технике 172
Геометрия 173
Элементарная геометрия, геометрия треугольника и тетраэдра 177
Проективная, неевклидова и алгебраическая геометрии 180
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 185
Геометрия вложенных многообразий . . . 195
Обобщенные пространства и теория относительности 197
Геометрия выпуклых многообразий . . . 197
Численные и графические методы 199
Таблицы 209
Вычислительные машины и математические приборы 211
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . 234
История математики. Биографии 235
Авторский указатель . . . . . I—V

Адрес редакции: Москва, 57, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, К. К. Марджанишвили, А. И. Маркушевич, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников*

Рефераты 531—1004 **№ 2** **Ноябрь 1953 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

531. **Задачи естествознания и технических наук в пятой пятилетке.** Несмеянов А. Н., Топчиев А. В., Коммунист, 1953, 30, № 9, 46—62

532. **В Московском математическом обществе.** Усп. мат. наук, 1953, 8, № 1 (53), 173—176; № 2 (54), 159—167; № 3 (55), 152—175

Приводятся резюме следующих докладов, прочитанных на заседаниях Московского математического общества.

23 сентября 1952 г. О возможности захвата в задаче трех тел. Ситников К. А.

30 сентября 1952 г. Об одном разностном уравнении. Соболев С. Л.; О спектрах динамических систем на торе. Колмогоров А. Н., Об одном уравнении смешанного типа. Бицадзе А. В.

7 октября 1952 г. О движении гироскопа Горячева — Чаплыгина. Сретенский Л. Н., О системах эллиптических уравнений. Векуа И. Н.

14 октября 1952 г. Структура спектра нелинейных операторных уравнений. Немыцкий В. В.; О математике народов Средней Азии в IX—XV веках. Юшкевич А. П.

28 октября 1952 г. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области. Олейник О. А.; К теории уравнений смешанного типа. Бабенко К. И.; Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел. Романов Н. П.; О квазикомпонентах незамкнутых множеств. Тайманов А. Д.

4 ноября 1952 г. О некоторых вопросах теории краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (обзорный доклад). Вишик М. И.

18 ноября 1952 г. Заседание, посвященное десятилетию со дня кончины знаменитого русского ученого С. А. Чаплыгина. Работы С. А. Чаплыгина в области аэродинамики и гидродинамики. Голубев В. В.; Работы С. А. Чаплыгина в области общей механики. Добронравов В. В.; О деятельности С. А. Чаплыгина в Московском математическом обществе. Сретенский Л. Н.; С. А. Чаплыгин как директор Московских высших женских курсов. Варсанофьева В. А.

25 ноября 1952 г. Дифференцируемые отображения областей евклидовых пространств. Кудрявцев Л. Д.; Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся. Войт С. С.

2 декабря 1952 г. Доклад И. К. Верещагина о произведении И. В. Сталина «Экономические проблемы социализма в СССР».

9 декабря 1952 г. О конечно-разностных аппроксимациях оператора Лапласа. Люстерник Л. А.; О явлениях интерференции в поведении целых функций конечной степени. Тиман А. Ф.; Решение проблемы анаморфозы функций в (N — 1)-мерном пространстве векторно-алгебраическими методами. Вильнер И. А.

16 декабря 1952 г. Симметрические функции на многомерных сферах. Хинчин А. Я.; О разложении по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. Левитан Б. М.; Параметрическое представление решений системы линейных функциональных уравнений в коммутативных операторах. Аржаных И. С.

23 декабря 1952 г. О суммах двух простых чисел. Линник Ю. В.; Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности. Франкль Ф. И.

30 декабря 1952 г. О распределении степенных невычетов и первообразных корней в рекуррентных рядах. Коробов Н. М.; Алгебраические признаки равномерной C-устойчивости конечно-разностных схем. Рябенький В. С.

10 февраля 1953 г. Распределения вероятностей в функциональных пространствах. Прохоров Ю. В.; Дробные доли и некоторые вопросы теории тригонометрических рядов. Пятецкий-Шапиро И. И.

17 февраля 1953 г. О математических работах Омара Хайяма. Розенфельд Б. А.; Общая тауберова теорема для отношения функций. Кореноблюм Б. И.

24 февраля 1953 г. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов (второе сообщение). Стечкин С. Б.; Подалгебра свободных лиевых алгебр. Ширшов А. И.

3 марта 1953 г. Радикалы колец и алгебр. Курош А. Г.; К топологии компактных групп Ли. Дынкин Е. Б.

533. **Третий австрийский математический конгресс с 9 по 14 сентября 1952 г. в Зальцбурге. Штифель** (3. Österreichischer Mathematikerkongress vom 9. bis 14. September 1952 in Salzburg. Stiefel E.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 1, 86—87 (нем.)

Приводится перечень докладов, прочитанных в секции прикладной математики.

534. **Под радио. Ван дер-Поль** (Beneath radio. VanderPol Balth), Proc. Instn. Radio Engrs Australia, 1953, **14**, № 1, 9—11 (англ.)

Доклад, прочитанный на собрании австралийского Института радиоинженеров в Сиднее в августе 1952 г. Отмечается роль математики в развитии техники и, в частности, радиотехники. Математика является фундаментом для радиотехники, по образному выражению автора,— лежит «под радио».

Н. П. Жидков

535. **Математика в деле строительства социализма. Николеску** (Matematica in construcţia socialismului. Nicolescu Miron), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 4, 145—147 (рум.)

Популярная статья, предназначенная для поступающих в высшие учебные заведения.

536. **Математика для астрономов-любителей** (Matematika pro astronoma-amatéra), Říše hvězd, 1953, **64**, № 4, 590—591 (чеш.)

537. **Языки, используемые наукой. Хауэртон, Дисс.** (The languages of the language of science. Howerton Robert J., Diss Charles E.), Science, 1953, **117**, № 3041, 391—392 (англ.)

Заметка содержит статистические данные о числе работ, опубликованных на разных языках и прореферированных в реферативном журнале Mathematical Reviews. В частности, подсчитывается, что количество математических статей, написанных по-русски и прореферированных в 1950 г., возросло по сравнению с 1940 г. в 6,7 раза, в то время как общее число статей возросло лишь в 2,4 раза.

Приводится таблица, в которой сравнивается распределение русских статей и статей на других языках по различным разделам математики.

Реферируемая заметка возникла в связи с тем, что ввиду быстрого роста советской науки перед американскими математиками встал весьма актуальный вопрос об изучении русского языка.

Р. Л. Добрушин

538. **Инженеры и математика** (Engineers and mathematics), Engineer, 1953, **195**, № 5069, 426 (англ.)

Отмечается, что математическая подготовка инженеров (в Англии) в настоящее время несоразмерно велика, в результате чего многие студенты инженерных факультетов университетов не заканчивают курса, так как не выдерживают экзаменов по математике, тогда как они могли бы стать вполне квалифицированными инженерами для практической деятельности в промышленности. Указывается, что если 50 лет назад пренебрегали математической подготовкой инженеров, то теперь соответствующие учебные планы скорее впадают в другую крайность. Подробно оговаривается очевидная необходимость серьезной математической подготовки инженеров, предназначаемых для работы в конструкторских бюро и технических научно-исследовательских институтах.

Конкретного обсуждения математической подготовки инженеров не дается. *В. И. Левин*

539. **Математическое содружество скандинавских стран. Новые журналы по математике.** (Et nordisk matematisk samarbejde. Nye tidsskrifter for matematik), Ingeniøren, 1953, **62**, № 12, 254 (дат.)

С 1953 г. математические объединения в скандинавских странах начинают издавать два новых журнала для математиков: «Nordisk Matematisk Tidskrift» (Математический журнал скандинавских стран) и «Mathematica scandinavica» (Математика в Скандинавии). Журналы будут содержать математические статьи, исторические обзоры по математике и статьи по вопросам элементарной математики. Журнал «Nordisk Matematisk Tidskrift» будет выходить 4 раза в год. «Mathematica Scandinavica» будет представлять больший научный интерес. Статьи в нем публикуются, помимо скандинавских, на английском и немецком языках. Журнал будет выходить 2 раза в течение года объемом 320 стр.

540. **Проект справочника проф. Бейтмана** (The Bateman project), Engng and Sci., 1953, **16**, № 5, 24 (англ.)

Сообщение о выходе в свет первого тома трехтомного справочника «Высшие трансцендентные функции» («Higher transcendental functions»). Следующие два тома будут содержать таблицы интегральных преобразований. Проект справочника, принадлежащий проф. Бейтману (умершему 7 лет назад), был осуществлен, на основании оставленных им материалов, коллективом авторов в составе Эрдели, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми. Даны краткие сведения о деятельности проф. Бейтмана.

В. И. Левин

541. **«Энциклопедия элементарной математики».** Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 1, 188—205

Сообщение о состоявшемся 28 мая 1952 г. на совместном заседании Московского математического общества и методологического семинара Механико-математического факультета МГУ обсуждении первых трех томов «Энциклопедии элементарной математики», издаваемой под редакцией П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина (Гостехиздат, М.—Л., I — Арифметика, 448 стр., 1951, 12 р. 55 к.; II — Алгебра, 424 стр., 1951, 12 р. 40 к.; III — Функции и пределы (основы анализа), 559 стр., 1952, 13 р. 10 к.). Приводятся рецензии А. Г. Куроша на I и II тома, рецензии Г. П. Толстова и С. В. Фомина на III том и резюме выступлений в прениях.

542 **РЕЦ. Основное направление математики. Крамер** (The mani stream of mathematics. Kramer Edna E., pp. XII+321, Oxford University Press, New York, 1951) [**Рецензия: Шнеккенбургер** (Schneckenburger Edith R.), Math. Mag., 1953, **26**, № 3, 172—173 (англ.)]

543 **РЕЦ.** **Природа чисел. Подход к основным идеям современной математики. Дьюбиш** (The nature of number. An approach to basic ideas of modern mathematics. Dubisch Roy, pp. XII+159, The Ronald Press Co., New York, 1952, 4.00 doll.) [**Рецензия: Менгер** (Menger Karl), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 273 (англ.)]

544 **РЕЦ.** **Методы прикладной математики. Хилдебранд** (Methods of applied mathematics. Hildebrand F. B., pp. 523, Prentice-Hall, Inc., New York, 1952, 7.75 doll.) [**Рецензия: Айзаксон** (Isaacson Eugene), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 345—346 (англ.)]

545 **Д.** **К вопросу о преподавании элементов высшей математики в средних школах. Дадунашвили С. А.** Автореф. дисс. канд. пед. н., Ин-т пед. наук Мин-ва просвещения Грузинской ССР, Тбилиси, 1953

См. также 549 **РЕЦ**, 931, 1004 **РЕЦ**

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

546 **К усилению теоремы приведения теории алгорифмов. Нагорный Н. М.**, Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 3, 341—342

Статья относится к построенной А. А. Марковым теории так называемых нормальных алгорифмов (см. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, **38**, 176—189) и содержит следующее усиление теоремы приведения:

Всякий нормальный алгорифм над алфавитом A эквивалентен относительно A некоторому нормальному алгорифму в алфавите $A\cup\{\alpha\}$, где $\alpha\in A$ (вместо $A\cup\{\alpha,\beta\}$ в теореме Маркова). Утверждается, что дальше теорему усилить (освободиться и от α) нельзя. Удваивающий алгорифм над A, т. е. такой $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A}(P) = PP$, когда P — слово в A, не эквивалентен относительно A никакому нормальному алгорифму в A. *А. В. Кузнецов*

547. **Непротиворечивое построение логики без типов. П. Аккерман** (Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II. Ackermann Wilhelm), Math. Z., 1953, **57**, № 2, 155—166 (нем.)

В первой части работы (Math. Z., 1952, **55**, 364—384) было построено логическое исчисление Σ. Понятия терма и формулы были определены одновременной рекурсией, причем, кроме обычных правил (например, если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — тоже формула и т. д.), введены следующие правила: 1) если $\mathfrak{A}(a_1,\ldots,a_n)$—формула, то $\hat{x}_1\ldots\hat{x}_n(\mathfrak{A}(x_1,\ldots x_n))$—терм (означающий класс тех систем $x_1,\ldots,x_n$ объектов, для которых утверждение $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$ верно); 2) если $a_1,\ldots,a_n$, b — термы, то $\{b\}(a_1,\ldots,c_n)$—формула (означающая утверждение: «система $a_1,\ldots,a_n$ входит в класс систем $x_1,\ldots,x_n$, определяемый термом b»).

Задаются схемы аксиом и правила вывода. Доказывается непротиворечивость построенного исчисления Σ. В случае, когда формула $\mathfrak{A}$ не содержит предикатных переменных, оказывается выводимой формула $\mathfrak{A}\vee\overline{\mathfrak{A}}$.

Во второй части работы из Σ выделяется частичное, также непротиворечивое исчисление Δ, не содержащее знаков импликации. Автор стремится показать, что этого исчисления «достаточно для выведения существенной части математики». С этой целью в рамках Δ определяются: натуральные числа, отношение равенства между ними, число 0, оператор перехода к следующему числу, операции сложения и умножения; при этом известные аксиомы элементарной теории чисел оказываются выводимыми формулами в Δ. Аналогично показывается, что исчисление Δ содержит формализованную теорию рациональных чисел.

В заключение намечается построение «разветвленного анализа» — непротиворечивой теории действительных чисел, отличающейся, однако, от классической теории тем, что у автора действительные числа имеют различные «порядки» (порядками служат натуральные числа). Всякий квантор, применяемый при определении действительного числа, может относиться лишь к совокупности чисел определенного порядка; само же определяемое действительное число имеет высший порядок. Соответственно с этим теорема существования верхней грани ограниченного множества оказывается применимой лишь к множествам чисел одного и того же порядка, а сама верхняя грань оказывается числом высшего порядка. *А. А. Марков*

548. **Классы рекурсивно перечислимых множеств и их проблемы разрешимости. Райс** (Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. Rice H. G.), Trans Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 358—366 (англ.)

Пусть A — класс рекурсивно перечислимых (р. п.) множеств и θ_A— множество всех частично рекурсивных (ч. р.) функций, каждая из которых пересчитывает какое-либо множество класса A; пустое множество также считается р. п. с нигде не определенными пересчитывающими функциями.

Класс A называется вполне р. п., если θ_A — р. п.; если θ_A рекурсивно (р.), то A называется вполне р.

Доказывается, что не существует вполне р. классов, отличных от пустого и универсального. Этот основной результат можно сформулировать так: каково бы ни было свойство P, присущее некоторым, но не всем р. п. множествам, невозможен алгорифм, устанавливающий по данной ч. р. функции, пересчитывает ли она множество, обладающее свойством P, или нет.

Нетривиальным примером вполне р. п. класса является $L(k)$, т. е. класс всех множеств, содержащих число k ($k = 0, 1, 2,\ldots$), а также всякий класс типа $\Sigma\Pi L(k)$, т. е. р. п. сумма конечных пересечений классов $L(k)$.

Автор доказывает, что всякий вполне р. п. класс включает подкласс типа $\Sigma\Pi L(k)$, и считает правдоподобным следующее предложение: вся-

кий вполне р. п. класс является классом типа $\Sigma\Pi L(k)$. *Б. А. Трахтенброт*

549 **РЕЦ. О математическом мышлении.** В е й з е (Vom mathematischen Denken. W e i s e K. E. Veröffentlichungen der Schleswig-Holsteinischen Universitätsgesellschaft. Neue Folge, № 2. Kiel 1952, 30 S. Verlag Ferd. Hirt. Preis geh. 1.20 DM) [**Рецензия:** Д р е г е р (Draeger), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 3, 111 (нем.)]

См. также 541, 542 РЕЦ, 573 РЕЦ, 631—633

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

550. **О числе решений задачи Тарри.** Х у а Л о - к е н (On the number of solutions of Tarry's problem. H u a L o o - k e n g), Acta sci. sinica, 1952, **1**, № 1, 1—76 (англ.)

Рассматривается система диофантовых уравнений

$$x_1 + \cdots + x_t = y_1 + \cdots + y_t$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^k + \cdots + y_t^k$$

при условиях $1 \leqslant x_i \leqslant P$; $1 \leqslant y_i \leqslant P$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ $k \geqslant 2$. Пусть $t_0 = t_0(k)$ определяется таблицей

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10
t_0	3	8	23	62	155	380	889	2034	4595	$[k^2(3\ln k + \ln\ln k + 4)]$

Тогда для всякого данного $t \geqslant t_0$ имеем соотношение

$$\lim_{P\to\infty} P^{k(k+1)/2-2t}\, r_t(P) = \mathfrak{D}_0 \mathfrak{S},$$

где $r_t(P)$ — число решений указанной системы;

$$\mathfrak{D}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \exp 2\pi i \times \right.$$
$$\left. \times (\beta_k x^k + \cdots + \beta_1 x)\, dx \right|^{2t} d\beta_k \ldots d\beta_1;$$

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_k = 1}^{\infty} \sum_{\substack{h_1 = 1 \\ (h_1, q_1) = 1}}^{q_1} \cdots \sum_{\substack{h_k = 1 \\ (h_k, q_k) = 1}}^{q_k} \left| q_1^{-1} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots q_k^{-1} \sum_{x=1}^{q_1 \cdots q_k} \exp 2\pi i \left(\frac{h_k}{q_k} x^k + \ldots + \frac{h_1}{q_1} x \right) \right|^{2t}.$$

Эта теорема улучшает предшествующий результат автора (1939 г.) (Хуа Ло-кен, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, **22**,5—179), где получалось

$$t_0 \sim \frac{3}{2} k^3 \ln k \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Улучшение стало возможным благодаря некоторым новым оценкам И. М. Виноградова и новым результатам автора.

Сообщаются некоторые замечания о системе диофантовых уравнений:

$$x_1 + \cdots + x_s = X_1$$
$$\cdots\cdots\cdots, \qquad 1 \leqslant x_i \leqslant P.$$
$$x_1^k + \cdots + x_s^k = X_k,$$

изучавшейся ранее К. К. Марджанишвили (Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, **1**, 609—631; Докл. АН СССР, 1939, **22**, 471—474) и Г. В. Емельяновым (Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., 1950, **19**, 3—39). *Ю. В. Линник*

551. **Об одной проблеме типа Варинга — Гольдбаха.** П р а х а р (Über ein Problem vom Waring-Goldbach'schen Typ. P r a c h a r K.), Monatsh. Math., 1953, **57**, 66—74 (нем.)

Доказывается, что почти все четные натуральные числа n представимы в форме

$$n = p_1^2 + p_2^3 + p_3^4 + p_4^5,$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 — простые числа.

Доказательство проводится классическими методами и опирается в основном на известные оценки тригонометрических сумм с простыми числами, принадлежащими акад. И. М. Виноградову, а также на одну из недавних теорем Рота о представимости почти всех натуральных чисел в форме

$$n = x^2 + y^3 + z^4.$$

Н. Г. Чудаков

552. **О сумме** $\sum_{p\leqslant x} \omega(f(p))$. П р а х а р (On the sum $\sum_{p\leqslant x} \omega(f(p))$. P r a c h a r K.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 236—239 (англ.)

Пусть $f(x)$ — неприводимый полином с целыми коэффициентами, не равный ax; $\omega(n)$ — число различных простых делителей n; p пробегает простые числа. Тогда $\sum_{p\leqslant x} \omega(f(p)) > cx \ln\ln x (\ln x)^{-1}$, где $c > 0$ — константа. *Ю. В. Линник*

553. **Об интервалах, отделяющих два последовательных простых числа.** Б о р е л ь (Sur les intervalles séparant deux nombres premiers consécutifs. B o r e l E m i l e), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1731 (франц.)

554. **Об уравнении** $x^m = py^m + (-1)^m$, $m = 1, 2$. М е с н е р (Sobre la ecuacion $x^m = py^m + (-1)^m$, $m = 1, 2$. M o e s s n e r A l f r e d), Euclides, 1953, **13**, № 145, 119 (исп.)

555. **О диофантовом уравнении $x^2+y^2+c=xyz$. Барнс** (On the diophantine equation $x^2+y^2+c=xyz$. Barnes E. S.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 242—244 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x^2+y^2+c=xyz \qquad (1)$$

в случае, когда c не делится на полный квадрат и когда существуют целые решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $(x, y)=1$.

Без нарушения общности можно ограничиться отысканием решений, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant y$. Все такие решения уравнения (1) имеют вид $x=u_n$, $y=u_{n+1}$, $z=v$, где последовательности чисел u_r определяются равенством $u_{r+1}=vu_r-u_{r-1}$. Начальные члены этих последовательностей удовлетворяют неравенству $0<u_0\leqslant c$, если $c>0$, и неравенству $0\leqslant u_0\leqslant\sqrt{-c}$, если $c<0$.

Отмечается, что если c не равно -2 или -3, то уравнение (1) имеет бесконечно много решений. Но среди этого бесконечного множества решений найдется лишь конечное число решений с различными значениями z, если только $c\neq-1$.

В. Д. Подсыпанин

556. **Заметка о неоднородных линейных формах. Барнс** (Note on non-homogeneous linear forms. Barnes E. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 360—362 (англ.)

Пусть $k(\theta)$ — алгебраическое поле степени n и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — его базис. Пусть $\theta^{(1)}=\theta$, $\theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(n)}$ — числа, сопряженные с θ относительно поля $k(\theta)$; при этом $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ — вещественные, $\theta^{(r+j)}$, $\theta^{(r+s+j)}$ $(j=1, \ldots, s)$ — комплексно сопряженные. Рассматриваются линейные формы относительно переменных $u_1, \ldots, u_n$:

$$\xi_i=\omega_1^{(i)}u_1+\cdots+\omega_n^{(i)}u_n \quad (i=1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Перенесением доказательства Чеботарева (Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1949, 219—221) теоремы о неоднородных линейных формах на случай комплексных форм дается простое доказательство следующей теоремы Давенпорта (Davenport H., Quart. J. Math., 1952, **3**, 32—41):

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — любые заданные числа, причем $c_1, \ldots, c_r$ — вещественные, а c_{r+j}, c_{r+s+j} $(j=1, \ldots, s)$ — комплексно сопряженные; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — линейные формы вида (1). Тогда существуют целые рациональные числа $u_1, \ldots, u_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\left|(\xi_1-c_1)\ldots(\xi_n-c_n)\right|<C_n\left|d\right|^{n/2(n-s)}, \qquad (2)$$

где d — дискриминант поля $k(\theta)$, а C_n — постоянная, зависящая только от n.

А. В. Малышев

557. **Об определителях решеток двух частных множеств точек. Малер** (On the lattice determinants of two particular point sets. Mahler K.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 229—232 (англ.)

Пусть $\Delta(T)$ — нижняя грань площадей основных параллелограммов решеток плоскости, имеющих одну из своих точек в начале координат и не имеющих точек в заданной области T плоскости. Известный результат Маркова (называемый обычно теоремой Гурвица) состоит в том, что если область K задается условием $|xy|<1$, то $\Delta(K)=\sqrt{5}$. Сегре (Segre B., Duke Math. J., 1945, **12**) показал, что для R_0, заданного условиями: $0<xy<1$, $x>0$, $y>0$, определитель $\Delta(R_0)=1$. Показывается, что для R, заданного условиями: $|xy|<1$, $x>0$, или для R_t, заданного условиями: $|xy|<1$, $x>t>0$, определитель $\Delta(R)=\Delta(R_t)=\sqrt{5}$, а для S_t, заданного условиями: $0<x<t$ или $x\geqslant t$, $|xy|<1$, определитель $\Delta(S_t)=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Б. Н. Делоне

558. **О произведении n линейных форм. Давенпорт** (On the product of n linear forms. Davenport H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 190—193 (англ.)

В заметке Барнса (см. реф. 556) по существу содержится простое доказательство следующей теоремы.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — однородные линейные формы n переменных $u_1, \ldots, u_n$ с ненулевым определителем Δ, причем $L_1, \ldots, L_r$ — вещественные, а L_{r+j}, L_{r+s+j} $(j=1, \ldots, s)$ — комплексно сопряженные формы, $r+2s=n$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — вещественные, а α_{r+j}, α_{r+s+j} $(j=1, \ldots, s)$ — комплексно сопряженные числа. Обозначим $M_H=\inf|L_1\ldots L_n|$ по всем целым рациональным числам $u_1, \ldots, u_n$, не равным одновременно нулю; $M_I=\inf|(L_1-\alpha_1)\ldots(L_n-\alpha_n)|$ по всем целым числам $u_1, \ldots, u_n$.

Тогда (в предположении, что $M_H\neq0$)

$$M_I<C_4(n)\,|\Delta|\left(\frac{|\Delta|}{M_H}\right)^{s/(n-s)}, \qquad (1)$$

где $C_4(n)$—постоянная, зависящая только от n. Уточнением рассуждений Барнса доказывается, что за исключением случаев $s=0$ и $r=0$

$$M_I<C_5(n)\,|\Delta|\left(\frac{|\Delta|}{M_H}\right)^{(2s-1)/(2n-2s-1)}$$

Показывается также, что в случаях $s=0$ и $r=0$ неравенство (1) является точным в отношении порядка $|\Delta|$.

А. В. Малышев

559. **О неопределенных квадратичных формах трех и четырех переменных. Уотсон** (On indefinite quadratic forms in three and four variables. Watson G. L.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 239—242 (англ.)

Частично переносится на случаи трех и четырех переменных следующий результат Давенпорта и Хейлбронна (Davenport, Heilbronn, J. London Math. Soc., 1946, **21**, 185—193): для любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\theta_1x_1^2+\ldots+\theta_5x_5^2\right|<\varepsilon$$

разрешимо в целых $x_1, \ldots, x_5$, не равных одновременно нулю, если $\theta_1, \ldots, \theta_5$ — вещественные числа, отличные от нуля и не все одного знака. Доказываются следующие две теоремы:

1. Пусть a — любое целое положительное число,

θ—положительный корень уравнения $\theta^2 = a\theta + 1$. Тогда существует постоянная $C = C(a)$ такая, что неравенства

$$|x^2 - a\theta y^2 - (a\theta + 1)z^2| < CX^{-2},$$
$$0 < x \leqslant X, \quad 0 < y \leqslant X, \quad 0 < z \leqslant X$$

разрешимы в целых x, y, z для любого целого положительного X.

2. Пусть d — любое целое положительное число; N — целое бесквадратное число вида $u^2 + dv^2$ с целыми u и v; $\theta \in k(\sqrt{N})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|x^2 + dy^2 - \theta^2(z^2 + dw^2)| < \varepsilon$$

разрешимо в целых x, y, z, w, не равных одновременно нулю.

Доказательство проводится при помощи разложения числа θ в непрерывную дробь.

А. В. Малышев

560. **Численные значения квадратичных форм (I). Оппенгейм** (Values of quadratic forms (I). Oppenheim A.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 13, 54—59 (англ.)

Численные значения квадратичных форм (II). Оппенгейм (Values of quadratic forms (II). Oppenheim A.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 13, 60—66 (англ.)

Проводятся исследования, связанные с известной проблемой о том, может ли всякая неопределенная квадратичная форма с числом переменных $s \geqslant 5$ и действительными коэффициентами представлять в целых числах 0 или сколь угодно малые числа, когда не все переменные равны 0 (Davenport H., Proceedings of the International Congress of Mathematiciens, Cambridge, Mass., U.S.A., 1952, 166—175).

Доказываются теоремы:

1. Если неопределенная квадратичная форма с действительными коэффициентами $f(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 3)$ для всякого $\varepsilon > 0$ допускает разрешение в целых числах $x_1, \ldots, x_n$ неравенств $0 < f(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon$, то и неравенства $0 < -f(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon$ также разрешимы в целых числах $x_1, \ldots, x_n$.

2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, неопределенная форма; $n \geqslant 5$, детерминант f не равен нулю. Пусть f представляет 0 собственным образом (т. е. при $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$) и f не кратно форме с рациональными коэффициентами. Тогда неравенства $0 < |f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$ разрешимы в целых $x_1, \ldots, x_n$ для всякого ε.

Приводятся три более сложные теоремы, трактующие частные случаи указанной проблемы.

Ю. В. Линник

561. **Односторонние неравенства для эрмитовых квадратичных форм. Оппенгейм** (One-sided inequalities for Hermitian quadratic forms. Oppenheim A.), Monatsh. Math. 1953, 57, 1—5 (англ.)

Пусть m — бесквадратное целое рациональное число; $\varphi(x, y)$ — неопределенная бинарная эрмитова квадратичная форма определителя Δ над квадратичным полем $K(\sqrt{m})$, т. е. форма вида $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i \tilde{x}_j$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, где $\tilde{a}$ сопряжено с a относительно $K(\sqrt{m})$. Находится наименьшая постоянная $C = C(m)$ такая, что неравенство

$$0 < \varphi(x, y) \leqslant C |\Delta|^{1/2}$$

может быть удовлетворено в целых числах x и y поля $K(\sqrt{m})$.

Доказывается, что если: 1) $m < 0$, или $m > 0$ и $\Delta > 0$, или m имеет вид $a^2 + b^2$ и $\Delta < 0$, то $C = (4 | \mu^2 m |)^{1/2}$, где $\mu = 1/2$, если $m \equiv 1\ (4)$, и $\mu = 1$, если $m \not\equiv 1\ (4)$; 2) $m \neq a^2 + b^2$, но $m = a^2 + 2b^2$ и $\Delta < 0$, то $C = (2 | \mu^2 m |)^{1/2}$. Для остальных случаев точная постоянная C не найдена.

Доказательство этой теоремы проводится сведением ее к вопросу о минимумах обычных квадратичных форм четырех переменных для целых рациональных чисел.

А. В. Малышев

562. **Об одной классической теореме Гурвица. Декомб** (Sur un théorème classique d'Hurwitz. Descombes Roger), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 15, 1460—1462 (франц.)

Пусть s — целое рациональное число. Исследуются нижняя грань c_s величин $c_s(\xi) = \overline{\lim_{p,\,q}} [1/|q(q\xi - p)|]$ (p и q — целые рациональные и $q \not\equiv 0 \pmod{s}$) и первая точка сгущения γ_s этих величин. Для случая $c(\xi) = \overline{\lim_{p,\,q}} [1/|q(q\xi - p)|]$ (p и q — целые рациональные и $q \neq 0$) соответственные числа $c = \sqrt{5}$ и $\gamma = 3$ (как и все $c(\xi)$, лежащие на отрезке $\sqrt{5} \leqslant c(\xi) \leqslant 3$) были получены Марковым (магист. дисс., 1880 г.). Пусть $\{u_n\}$ — ряд Фибопачи с $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, тогда для любого данного s в $\{u_n\}$ существуют числа, делящиеся на s, причем все они кратные наименьшему u_j.

Находятся следующие результаты:

1) $c_2 = \gamma_2 = 2$; $c_s = \sqrt{5}$ при $s \geqslant 3$;

2) если j — четное $(s = 3, 4, 6, 7, 8, \ldots)$, то $\gamma_s = 1 + 6\sqrt{5}/10$;

3) если j — нечетное и не меньше 7 $(s = 10, 13, 17, \ldots)$, то $\gamma_s = (u_{j+2}\theta + u_{j+3})/(\nu_{j+1}\theta + \nu_{j+2}) + \theta$, где $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$ и $\nu_n = u_{n+1} + u_{n-1}$;

4) для $j = 5$ $(s = 5)$, $\gamma_5 = \eta + (55\eta + 34)/(89\eta + 55)$, где $\eta = (4 + \sqrt{65})/7$.

Б. Н. Делоне

563. **Заметка о числах типа S. Левек** (Note on S-numbers. Leveque W. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 189—190 (англ.)

Пусть γ_r — нижняя грань положительных чисел γ', обладающих следующим свойством: для почти всех вещественных чисел ξ существуют такое $\gamma \leqslant \gamma'$ и такая последовательность положительных чисел $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, что для любого натурального числа m и для любых целых $a_0, a_1, \ldots, a_m$ $[a = \max(a_0, a_1, \ldots, a_m) \geqslant 1]$ имеет место неравенство

$$|a_0 + a_1\xi + \cdots + a_m\xi^m| \geqslant \Gamma_m a^{-\gamma_m};$$

пусть γ_c определяется аналогичным образом, но для комплексных ξ. Известная гипотеза Малера состоит в том, что $\gamma_r = 1$, $\gamma_c = \frac{1}{2}$ (легко доказывается, что $\gamma_r \geqslant 1$ и $\gamma_c \geqslant \frac{1}{2}$). До сих пор наилучшей известной оценкой было $\gamma_r \leqslant 3$, $\gamma_c \leqslant 5/2$ (Koksma J. F., Monatsh. Math. und Phys., 1939, 48, 176—189). Автор показывает, что применение одной леммы Н. И. Фельдмана позволяет установить оценку $\gamma_r \leqslant 2$, $\gamma_c \leqslant 3/2$.

А. Я. Хинчин

564. **Об U-числах Малера. Левек** (On Mahler's U-numbers. Leveque W. J.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 220—229 (англ.)

Последовательность многочленов $f_n(x) = a_0^{(n)} + \ldots + a_m^{(n)} x^m$ степени m и высоты $H(f_n)$ называется последовательностью L_m для числа ξ, если $H(f_1) \leqslant H(f_2) \leqslant \ldots$ и $0 < |f_n(\xi)| = \exp\{-\omega_n \ln H(f_n)\} < 1$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = \infty$.

Числа ξ, для которых существуют последовательности L_m, но не существует ни одной последовательности L_{m-1}, образуют класс U_m. Лиувиллевы числа совпадают с классом U_1. Устанавливаются критерии принадлежности числа к одному из классов U_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Доказывается, что каждый из классов U_m содержит хотя бы одно число.

Н. И. Фельдман

565. **Некоторые суммы, связанные с квадратичными вычетами. Карлиц** (Some sums connected with quadratic residues. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 12—15 (англ.)

Обобщается известная теорема, что для всякого простого числа $p \equiv 3 \pmod 4$ сумма символов Лежандра $\sum\limits_{1 \leqslant r \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\frac{r}{p}\right)$ положительна.

Доказывается положительность для такого же p сумм

$$(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right) B_{2k+1}\left(\frac{h}{p}\right);$$

$$(-1)^{k} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right) E_{2k}\left(\frac{2h}{p}\right)$$

при $k \geqslant 0$ и положительность сумм

$$(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right) B_{2k}\left(\frac{h}{p}\right);$$

$$(-1)^{k} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right) E_{2k-1}\left(\frac{2h}{p}\right)$$

при $p \equiv 1 \pmod 4$ и $k \geqslant 1$. Здесь $B_k(x)$ и $E_k(x)$ соответственно полиномы Бернулли и Эйлера.

Ю. В. Линник

566. **Заметка об одной теореме Глейшера. Карлиц** (Note on a theorem of Glaisher. Carlitz L.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 245—246 (англ.)

Доказывается сравнение

$$\frac{1}{2} p(p-r) A_{r-1} - A_r \equiv \frac{1}{24} \frac{r(r-1)(r-2)}{r-3} \times B_{r-3} p^4 \pmod{p^5}, \qquad (1)$$

где p — простое число, большее 5; $r > 3$ и нечетно; B_k — числа Бернулли; A_r — коэффициенты многочлена

$$(x+1)\ldots(x+p-1) = x^{p-1} + A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1},$$

откуда

$$A_r = \frac{r}{p!} \sum_{s=0}^{p} (-1)^{p-s} \binom{p}{s} s^{p+r}$$

Доказательство основано на результатах Глейшера, которому принадлежит сравнение менее точное, чем (1).

И. И. Пятецкий-Шапиро

567. **Замечание об одной гипотезе Андрэ Вейля. Карлиц** (Note on a conjecture of André Weil. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 5—9 (англ.)

А. Вейль (Weil A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 497—508) высказал гипотезу о том, что если V является n-мерным многообразием без особых точек над полем Галуа $GF(q)$, $q = p^n$, p — простое и N_m — число рациональных точек на V над алгебраическим расширением данного поля $GF(q^m)$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m u^{m-1} = \frac{d}{du} \ln Z(u);$$

здесь $Z(u)$ — рациональная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению вида

$$Z(q^{-n} u^{-1}) = \pm q^{\frac{nk}{2}} u^k Z(u)$$

(где k — постоянно) и обладающая некоторыми другими свойствами. Эта гипотеза рассматривается для некоторых частных случаев, когда N_m и $Z(u)$ можно вычислить «явно», а именно, когда многообразия заданы формулой $Q(x_1, \ldots, x_s) = \alpha$, где $Q(x_1, \ldots, x_s)$ — квадратичная форма с дискриминантом $\delta \neq 0$, и формулой

$$\alpha_1 x_1^e y_1^f + \cdots + \alpha_s x_s^e y_s^f = 0, \ (e, f) = 1.$$

Ю. В. Линник

568. **Распределение первообразных корней в конечном поле. Карлиц** (Distribution of primitive roots in a finite field. Carlitz L.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 13, 4—10 (англ.)

Обобщаются результаты Давенпорта (Davenport H., Quart. J. Math., 1937, 8, 308—312).

Пусть $GF(p^n)$ — поле Галуа из p^n элементов, θ — его порождающий элемент, a — целое число, $0 \leqslant a \leqslant p-1$. Доказываются теоремы:

1) Если $N(e)$ число элементов вида $\theta + a$, которые принадлежат к экспоненту $e \setminus (p^n - 1)$ мультипликативной циклической группы поля, то $N(e) =$

$= \frac{\varphi(e)}{p^n - 1} p + O(p^{1-1/2(n+1)+\varepsilon})$; здесь $\varphi(e)$ — функция Эйлера; $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Отсюда видны существование и число первообразных корней поля, имеющих вид $\theta + a$.

2) Если $N_r(e)$ обозначает число элементов вида $\alpha = \theta^r + a_1\theta^{r-1} + \cdots + a_r$, $a_r \in GF(p)$, принадлежащих к экспоненту e, то при $1 \leqslant r < n$ $N_r(e) = \frac{\varphi(e)}{p^n - 1} p^r + O(p^{r/2+\varepsilon})$.

Далее дается обобщение некоторых результатов Артина и другие теоремы. В формулировке результатов Давенпорта допущены неточности.

Ю. В. Линник

569. Обобщение одной теоремы Анкени и Роджерса. Фландерс (Generalization of a theorem of Ankeny and Rogers. Flanders Harley), Ann. Math., 1953, **57**, № 2, 393—400 (англ.)

Анкени и Роджерс (Ankeny N. C., Rogers C. A., Ann. Math., 1951, **53**, 541—550) доказали, что если для некоторого целого рационального a сравнение $x^n \equiv a\,(p)$ разрешимо почти для всех (в смысле плотности) p, то или $a = b^n$, или $8 \nmid n$ и $a = 2^{n/2} b^n$.

Автор получает следующее обобщение и обращение теоремы Анкени и Роджерса:

Пусть k — поле алгебраических чисел; ν — наибольшее число, для которого $\cos(2\pi / 2^\nu) \in k$; a — целое число из k; n — такое натуральное число, что сравнение $x^n \equiv a\,(\mathfrak{p})$ разрешимо для почти всех дивизоров $\mathfrak{p}$.

Тогда или $a = b^n$, $b \in k$, или же $2^{\nu+1} \nmid n$, ни i, ни $i\cos(2\pi / 2^{\nu+1})$ не принадлежат k и

$$a = b^n [1/2 (1 + \cos(2\pi/2^\nu))]^{n/2},$$

$b \in k$. Наоборот, если все эти условия выполняются, то сравнение разрешимо для всех $\mathfrak{p}$, кроме, может быть, делителей двойки.

Доказано также, что если k есть поле алгебраических функций с конечным полем констант и n не делится на характеристику, то из разрешимости сравнения $x^n \equiv a\,(\mathfrak{p})$ для всех простых дивизоров $\mathfrak{p}$ кроме, быть может, конечного числа, следует, что a является n-й степенью в k. *И. Р. Шафаревич*

570. Конечные ряды Фурье и уравнения в конечных полях. Уайтман (Finite Fourier series and equations in finite fields. Whiteman Albert Leon), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 1, 78—98 (англ.)

Конечным рядом Фурье автор называет разложение комплексной функции на конечной абелевой группе в линейную комбинацию характеров. Исследуется главным образом следующая функция, связанная с решениями уравнения

$$c_1 x_1^{a_1} + \cdots + c_s x_s^{a_s} + c_{s+1} = 0$$

в конечном поле. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_s$ — любые характеры мультипликативной группы конечного поля $F(p^n)$ из p^n элементов и

$$\psi(\chi_1, \cdots, \chi_s) = \sum \chi_1(a_1) \cdots \chi_s(a_s),$$

где суммирование производится по всем наборам $a_1, \cdots, a_s$ отличных от 0 элементов поля $F(p^n)$ таким, что $a_1 + \cdots + a_s = 1$. Вычисляются сумма Парсеваля функции ψ, т. е. сумма значений $\psi(\chi_1, \ldots, \chi_s)\,\overline{\psi}(\chi_1\eta_1, \ldots, \chi_s\eta_s)$, когда $\chi_1, \ldots, \chi_s$ пробегают любые наборы по s характеров мультипликативной группы поля $F(p^n)$. Вычисляются также некоторые аналогичные суммы. *И. Р. Шафаревич*

571. Об одном предположении Хаммерсли. Эрдёш (On a conjecture of Hammersley. Erdös P.), J. London Math. Soc., 1953, ч. 2, **28**, № 110, 232—236 (англ.)

Пусть $\Sigma_{n,s}$ — s-ая элементарная симметрическая функция от первых n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ (сумма C_n^s различных произведений из s множителей). Хаммерсли (Hammersley J. M., Proc. London Math. Soc., 1951, **1**, ч. 3, 435—452) высказал предположение, что значение s, дающее $\Sigma_{n,s}$ максимальное значение, единственно при данном n. Приводится доказательство этой гипотезы.

Ю. В. Линник

572. Теоремы, исходящие из китайской национальной игры Цзяньшицзы. Минь Сы-Хао (由揀石子得到的定理,閔嗣鶴),(Чжунго Шусюэ Цзачжи), **中國數學雜誌** 1, № 2, 22—29 (кит.)

Китайская национальная игра Цзяньшицзы заключается в следующем: из двух кучек камней двое играющих поочередно выбирают камни, руководствуясь правилами: а) можно брать любое количество камней из одной кучки, или б) можно брать любое количество камней сразу из двух кучек, но непременно поровну из каждой.

Первоначальное количество камней в каждой кучке произвольно. Выигрывает игрок, взявший последний камень. Строится исчерпывающая математическая теория этой игры. *Б. А. Кордемский*

573 РЕЦ. Теория чисел. Стюарт (Theory of numbers. Stewart B. M., pp. XIII+267, The Macmillan Co., New York., 5.50 doll.) [**Рецензия: Поллард** (Pollard Harry), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 274—275 (англ.)]

См. также 532, 534, 541, 542 **РЕЦ**, 543 **РЕЦ**, 576, 589, 591, 852, 874, 923, 924, 940

АЛГЕБРА

574 К. Курс высшей алгебры. Ляпин Е. С., Пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов, 344 стр., с черт., Учпедгиз, М., 1953

Книга состоит из трех частей. В первой части рассматриваются комплексные числа, многочлены от одного или нескольких переменных с комплексными коэффициентами и алгебраические уравнения. Приводится доказательство основной теоремы алгебры, опирающееся на лемму Даламбера. Рассматривается система алгебраических уравнений с не-

сколькими неизвестными и приводится способ решения системы, не связанный с понятием результанта.

Во второй части приводится общая теория многочленов над числовыми полями, а также вычисление рациональных и действительных корней многочленов над полем рациональных и полем действительных чисел. Излагается метод Штурма отделения действительных корней и приближенное вычисление действительных корней по способу Ньютона. В этой же части доказывается теорема о разложении дробно-рациональной функции на простейшие. Вторая часть заканчивается изложением элементов теории числовых алгебраических расширений.

В третьей части сообщаются обычные сведения по теории определителей, теории матриц, теории линейных уравнений с несколькими неизвестными и теории квадратичных форм. В заключение формулируется без доказательства теорема о приведении вещественной квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

Л. Я. Окунев

575 **РЕЦ.** **Введение в алгебру и ее приложения.** **Хаупт** (Einführung in die Algebra und ihre Anwendungen. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technick, Reihe A., Band 5, Teil 1. Haupt O., 2. Aufl., S. XVIII+370, Leipzig, 1952, Akademische Verlagsgesellschaft, Preis geb. 23 DM). [**Рецензия: Дрегер** (Draeger), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 3, 111 (нем.)]

576 **РЕЦ.** **Университетский курс алгебры.** **Литлвуд** (A university algebra. Littlewood D. E., pp. 8+292, Heineman, London, 1950, 25 s.) [**Рецензия: Зелинский** (Zelinsky Daniel), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 97—98 (англ.)]

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

577. **О квадратных множителях многочлена четвертой степени.** **Кемпбелл** (On the quadratic factors of a polynomial of the fourth degree. Campbell J. G.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 3, 184—185 (англ.)

Приводится метод разложения многочлена

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

с целыми коэффициентами в произведение двух целочисленных множителей $x^2 + Ax + B$ и $x^2 + A_1x + B_1$, основанный на следующей легко доказываемой теореме:

Пусть многочлен $f(x)$ делится на $x^2 + Ax + B$, m — целое число, $m_1,\ldots,m_j$ — всевозможные делители $f(m)$; тогда одно из чисел $m_1 - m^2,\ldots,m_j - m^2$ равно $Am + B$.

Для сокращения числа испытаний предлагается использовать очевидные соотношения

$$A + A_1 = a, \quad BB_1 = d, \quad B + B_1 + AA_1 = b,$$

$$AB_1 + A_1B = c.$$

Л. Я. Окунев

578. **Об одном методе изучения рекуррентных многочленов.** **Пароди** (Sur une méthode d'étude des polynomes récurrents. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 17, 1626—1628 (франц.

Рассматривается последовательность многочленов $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяемых рекуррентным соотношением

$$f_1(n)y_n(x) + [f_2(n) - f_3(n)x]y_{n-1}(x) + f_4(n)y_{n-2}(x) = 0,$$

$$y_0 = \quad , \; y_1 = 0; \qquad (1)$$

функции $f_k(n)$ предполагаются вещественными и $f_3(n) \neq 0$. Нули многочлена $y_n(x)$ являются собственными значениями матрицы типа континуанты

$$Y_n = \begin{pmatrix} \frac{f_2(n)}{f_3(n)} & \frac{f_4(n)}{f_3(n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{f_1(n-1)}{f_3(n-1)} & \frac{f_2(n-1)}{f_3(n-1)} & \frac{f_4(n-1)}{f_3(n-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_1(1)}{f_3(1)} & \frac{f_2(1)}{f_3(1)} \end{pmatrix},$$

свойства спектра которой хорошо известны. Легко выписать верхнюю границу модулей корней многочлена $y_n(x)$, а также условия, при которых все корни имеют вещественные части определенного знака. Сумма корней многочлена $y_n(x)$ равна следу матрицы Y_n и не зависит от функций $f_1(n)$ и $f_4(n)$, поэтому при любых f_1 и f_4 многочлен $y_n(x)$ имеет корень по модулю больший, чем

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1} \frac{f_2(k)}{f_3(k)}\right|.$$

Неравенства $f_1(k)f_4(k+1)f_3(k)f_3(k+1) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ являются достаточными условиями того, что собственные значения матрицы Y_n, а следовательно, и корни многочлена $y_n(x)$ вещественны и просты.

Н. Н. Мейман

579. **Условия, налагаемые на коэффициенты, для определения степени затухания процессов выравнивания (обобщенные условия Гурвица).** **Шмуц** (Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen). Schmutz O.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 1, 33—41 (нем.)

Статья не содержит новых результатов. В обзорном порядке приводится критерий Рауса — Гурвица для многочлена с вещественными коэффициентами и его обобщения на случай комплексных коэффициентов. Эти критерии применяются известным образом к устойчивой системе для определения ее «степени устойчивости» (наименьшего из расстояний корней характеристического уравнения от мнимой оси) и «колебательности» (наименьшего угла с вершиной в начале, охватывающего в комплексной плоскости все корни характеристического многочлена); подробное исследование этих вопросов см. Цыпкин Я. З., Бромберг П. В., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1945, № 12, 1163—1168; Фельдбаум А. А., Автоматика и телемеханика, 1948, **9**, № 4, 253—279.

Ф. Р. Гантмахер

580. **Определители. 1. Как пользоваться этим мощным, но простым математическим аппа-**

ратом. **Сибли** (Determinants. 1. How to use this powerful yet simple mathematical tool. Sibley E. H.), Electrical Rev., 1953, **152**, № 12, 621—624 (англ.)

Определители. 2. Решение систем уравнений. Сибли (Determinants. 2. The solution of simultaneous equations. Sibley E. H.), Electrical Rev., 1953, **152**, № 13, 699—704 (англ.)

Элементарные статьи. Дается применение определителей к расчету электрических цепей.

А. И. Узков

581. **Один специальный определитель. Эйткен** (A special determinant. Aitken A. C.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 122 (англ.)

Приводится еще одно доказательство того, что определитель $|a_{ik}|$, элементами которого являются биномиальные коэффициенты $a_{ik} = \binom{n+1}{2k-i}$, равен $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. Это утверждение без доказательства было высказано Несбиттом и доказано Мьюром (Muir, History of determinants, 1900—1920, стр. 316).

А. И. Жуков

582. **Элементарный вывод правила Крамера. Уитфорд, Кламкин** (On an elementary derivation of Cramer's rule. Whitford D. E., Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 3, 186—187 (англ.)

Приводится простой вывод правила Крамера для решения систем линейных уравнений.

583. **Об алгебре электрических цепей. Ботт, Даффин** (On the algebra of networks. Bott R., Duffin R. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 1, 99—109 (англ.)

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство; R_1 и R_2 — его взаимно дополнительные ортогональные подпространства; P_i — матрица, проектирующая R^n на $R_i (i = 1,2)$. Дискриминант квадратной матрицы G порядка n относительно R_i определяется как

$$D_i = \det (GP_i + P_j),$$

а обратная матрица для G относительно R_i как

$$T_i = P_i (GP_i + P_j)^{-1} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2).$$

Оказывается, что T_i существует в том и только в том случае, когда $D_i \neq 0$, что $T_i G$ определяет в R_i тождественное отображение и что D_i есть однородная форма от элементов матрицы G, степень которой равна размерности подпространства R_i. Изучаются связи между D_1, T_1 и D_2, T_2, а также различные свойства D_i и T_i, в частности, для случая, когда G — симметрическая или диагональная матрица.

Даются электрическая и механическая интерпретации рассматриваемых вопросов.

Л. Д. Кудрявцев

584. **О перестановочности линейных преобразований. Шарль** (Sur la permutabilité des opérateurs linéaires. Charles Bernard), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1722—1723 (франц.)

Еще Фробениус поставил вопрос о том, для любых ли двух коммутирующих матриц A и B существует такая матрица C, что A и B выражаются как многочлены от C. Филлипс (Phillips H. B., Amer J. Math., 1919, 266—278) показал, что это не всегда так. В работе приводится одно условие, необходимое для того, чтобы такая матрица C существовала.

И. Р. Шафаревич

585. **Заметка о парах нормальных матриц, обладающих L-свойством. Вигман** (A note on pairs of normal matrices with property L. Wiegmann N. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 35—36 (англ.)

Говорится, что матрицы A и B с собственными значениями соответственно λ_i и μ_i обладают L-свойством, если при любых комплексных α и β собственными значениями матрицы $\alpha A + \beta B$ будут числа $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$. Доказывается, что нормальные матрицы, обладающие L-свойством, коммутируют между собой. Этим обобщается результат Моцкина и Тауски (Motzkin T. S., Taussky O., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 108—114) о коммутативности эрмитовых матриц, обладающих L-свойством.

Д. М. Котелянский

586. **О коммутирующих матрицах. Иган, Ингрэм** (On commutative matrices. Egan M. F., Ingram R. E.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 107—110 (англ.)

Приводятся новые доказательства теорем, содержащих условия, при которых все матрицы из некоторого множества матриц могут быть приведены к треугольному или диагональному виду одним и тем же преобразованием $A \to T^{-1}AT$ (см. Drazen M. P., Dungey J. W., Gruenberg K. W., J. London Math. Soc., 1951, **26**, № 103, 221—228).

Е. Г. Шульгейфер

587. **Вариация спектра нормальной матрицы. Гофман, Виландт** (The variation of the spectrum of a normal matrix. Hoffman A. J., Wielandt H. W.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 37—39 (англ.)

Определяется «расстояние между спектрами» $d(\alpha, \beta)$ двух матриц $A = \| a_{ik} \|_1^n$ и $B = \| b_{ik} \|_1^n$, имеющих соответственно характеристические числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$d(\alpha, \beta) = \min_{(k_1, \ldots, k_n)} \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_{k_i}|^2 \right]^{1/2};$$

здесь $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ пробегают всё перестановки из индексов $1, 2, \ldots, n$. Если A — эрмитова матрица и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, а $\operatorname{Re}\beta_1 \geqslant \operatorname{Re}\beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\beta_n$, то

$$d(\alpha, \beta) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2 \right]^{1/2}.$$

Норма матрицы $C = \| c_{ik} \|_1^n$ определяется так:

$$\| C \| = \left[\sum_{i,k=1}^{n} |c_{ik}|^2 \right]^{1/2}.$$

Основной результат работы:

Если A и B — нормальные матрицы ($A^*A = AA^*$, $B^*B = BB^*$), то $d(\alpha, \beta) \leqslant \| A - B \|$; знак равенства

имеет место в том и лишь в том случае, когда матрицы A и B одним и тем же унитарным преобразованием приводятся к диагональному виду.

Ф. Р. Гантмахер

588. **Асимптотическое поведение степеней матриц. Гаучи** (The asymptotic behaviour of powers of matrices. Gautschi Werner), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 127—140 (англ.)

Работа начинается с вывода оценок для нормы степени квадратной матрицы A;

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu|^{2p}\right]^{1/2} \leqslant N(A^p) \leqslant cp^{k-1}\left[\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu|^{2p}\right]^{1/2} \quad (1)$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь норма $N(A) = \left[\sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}|^2\right]^{1/2}$; λ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ — собственные значения A, причем $\sum_\nu |\lambda_\nu|^2 > 0$; m_ν — кратность λ_ν в минимальном многочлене для A; $k = \max_\nu m_\nu$; c — постоянная, зависящая только от A.

Оценка для $N(A^p)$ сверху получена применением интерполяционной формулы Сильвестра, оценка снизу следует из элементарных свойств нормы.

Приводится пример, в котором

$$\frac{N(A^p)}{p^{k-1}\left[\sum_\nu |\lambda_\nu|^{2p}\right]^{1/2}} \to c \text{ при } p \to \infty;$$

нижняя граница в (1) достигается при всех целых $p \geqslant 1$ для нормальных матриц.

Пусть

$$F_p(A) = [N(A^p)]^{1/p};\ G_p(A) = \left[\max_\nu \sum_{\mu=1}^{n} |a_{\mu\nu}^{(p)}|\right]^{1/p},$$

$$\omega_A = \max_\nu |\lambda_\nu|.$$

Из оценки (1) выводится, что при целых $p \geqslant 1$ 1) $\omega_A \leqslant F_p(A)$; $F_p(A) \to \omega_A$ при $p \to \infty$; 2) $\omega_A \leqslant G_p(A)$; $G_p(A) \to \omega_A$ при $p \to \infty$; 3) если p пробегает строго растущую последовательность p_ν и каждое p_ν кратно $p_{\nu-1}$, то $F_p(A)$ и $G_p(A)$ монотонно стремятся к ω_A. Эти результаты обобщают результаты Фарнелла (Farnell A. B., Amer. Math. Monthly, 1945, **52**, 488—493) и Брауера (Brauer A., Duke Math. J., 1946, **13**, 387—395), полученные ими для случая $p_\nu = 2^{\nu-1}$.

Далее в работе устанавливаются оценки роста степеней треугольных матриц

$$D = \|d_{\mu\nu}\|;\ d_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu > \nu,\ |d_{11}| \geqslant |d_{22}| \geqslant \ldots \geqslant |d_{nn}|.$$

Доказывается, что

$$1)\ |d_{ik}^{(p)}| \leqslant c\,|d_{ii}|^p p^{\alpha_i} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \quad (2)$$

Здесь $d_{ik}^{(p)}$ — элементы D^p, c — постоянная, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n-1$ определяются структурой матрицы D. 2) Для случая $|d_{11}| > |d_{22}| > \ldots > |d_{nn}|$ существует треугольная матрица G, являющаяся пределом

$$\left\| \frac{d_{ik}^{(p)}}{|d_{ii}|^p} \right\| \text{ при } p \to \infty. \qquad \textit{Д. М. Котелянский}$$

589. **Заметка об ортогональных матрицах. Карлиц** (A note on orthogonal matrices. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 253—255 (англ.)

Пусть через S_r обозначена матрица $(a_{ij}) \equiv ((i-j)^r)$, порядок p которой — простое число. Тогда полиномиальная матрица $A \equiv 1 + x_1 S_1 + \ldots + x_k S_{2k-1}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — независимые переменные и $k < (p-1)/2$, ортогональна, т. е. $AA' \equiv 1 \pmod p$. Если $p = 4m-1$, то ортогональной является матрица $B \equiv 1 + x_1 S_1 + \ldots + x_m S_{2m-1} + \frac{1}{2} x_m^2 S_0$. Случай, когда $p=2$, рассмотрен Бреннером (Brenner J. L., Amer. Math. Monthly, 1951, **58**, 327—329). *А. М. Лопшиц*

590. **Обобщение гамильтоновых матриц. Хуа Ло-кен** (A generalization of Hamiltonian matrices. Hua Loo-keng), Acta sci. sinica, 1953, **2**, № 1, 1—58 (англ.)

Пусть K — тело с характеристикой $\chi \neq 2$, в котором имеется инволюционный антиавтоморфизм $a \to \bar{a}$; $A = (a_{ij})$ — матрица с элементами из K, $\bar{A}' = (\bar{a}_{ji})$. Квадратная матрица A называется H-матрицей со скаляром ρ, если $\bar{A}' = \rho A$, ρ принадлежит центру K и $\rho\bar{\rho} = 1$. Пусть S — H-матрица n-го порядка со скаляром ρ, имеющая обратную. Матрица P, удовлетворяющая условию $PS\bar{P}' = S$, называется унитарной относительно S. Унитарные матрицы образуют унитарную группу $U_n(K, S)$. В работе рассматриваются вопросы строения унитарных матриц и унитарной группы $U_n(K, S)$.

Максимальное значение ν, для которого существует такая прямоугольная $\nu \times n$ матрица P, что $PS\bar{P}' = 0$, называется индексом S. Доказывается, что если n четно и $\nu = \frac{1}{2}n$, то всякая унитарная относительно S матрица разлагается в произведение

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A}'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & I-J \\ \rho(I-J) & J \end{pmatrix},$$

где большими буквами обозначены матрицы ν-го порядка, $\bar{X}' = -\rho X$; $\bar{Y}' = -\rho Y$; J — диагональная матрица и $J^2 = 1$. Для других случаев аналогичное разложение также существует, но имеет несколько более сложный вид. Даются и другие разложения унитарных матриц на множители простого вида.

Относительно группы $U_n(K, S)$ получены следующие результаты: за исключением случаев, когда K состоит из трех элементов или когда $n=2$, центр группы $U_n(K, S)$ состоит из матриц вида λI, где

λ — всевозможные элементы центра K, удовлетворяющие условию $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

Унитарная матрица T, для которой $T + I = N$ имеет ранг 1 и $N^2 = 0$, называется трансвекцией. При $n \geqslant 4$ группа $TU_n(K, S)$, порождаемая трансвекциями, является коммутантом группы $U_n(K, S)$. За исключением случая, когда K состоит из девяти элементов, фактор-группа группы $TU_n(K, S)$ по ее центру простая. *В. К. Иванов*

591. **Еще одно доказательство теоремы Минковского о произведении двух неоднородных линейных форм. Касселс** (Yet another proof of Minkowski's theorem on the product of two inhomogeneous linear forms. Cassels J. W. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 365—366 (англ.)

Автор предлагает еще одно доказательство упомянутой в заголовке теоремы Минковского. Теорема 2 автора следует, между прочим, из алгорифма разделенных параллелограммов Делоне (Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, 11, 505—538). *Б. Н. Делоне*

592. **О приведении положительно определенных тернарных квадратичных форм. Брандт** (Über die Reduktion der positiven ternären quadratischen Formen. Brandt Heinrich), Math. Nachr., 1953, 8, № 4, 249—254 (нем.)

Дается метод определения числа собственных автоморфизмов положительно определенной тернарной квадратичной формы с вещественными коэффициентами (т. е. числа целочисленных линейных преобразований с определителем $+1$, не изменяющих эту форму). Метод основан на специальном способе приведения, т. е. выбора среди всех собственно эквивалентных между собой форм однозначно определенного представителя. Содержащиеся в работе результаты изложены без доказательств. *В. Б. Демьянов*

593 К. **Теория матриц. Гантмахер Ф. Р.**, 491 стр., Гостехиздат, М., 1953, 20 р. 90 к.

Дается систематическое изложение классической теории матриц, весьма полное и богатое содержанием. Автор интересуется также приложениями теории матриц к теории дифференциальных уравнений и к смежным с нею вопросам механики. Книга будет служить в первую очередь в качестве справочника, полезного как для алгебраистов и математиков других специальностей, в том числе математиков-вычислителей, так и для механиков и физиков. Учет интересов лиц, пользующихся линейной алгеброй, проявляется, в частности, в большом внимании, уделенном в книге вычислительным методам теории матриц. Автор указывает, что всюду, кроме отдельных параграфов в последних главах книги, он предполагает знакомство читателя лишь с теорией определителей и курсом высшей математики в объеме программы втуза. К этому нужно добавить, впрочем, алгебру многочленов в объеме университетской программы.

Многое из содержания книги до сих пор не включалось в книги по линейной алгебре. В ряде мест автор дает новые доказательства. Общая («аффинная») часть теории матриц излагается в книге над произвольным числовым полем. Можно было бы делать это сразу над произвольным полем, тем более, что иногда автор принужден выходить за рамки числовых полей (поля рациональных функций).

Книга состоит из пятнадцати глав. В первой главе изложены операции над матрицами. Вторая глава содержит метод Гаусса для решения систем линейных уравнений, его механическую интерпретацию и обобщения. В третьей главе рассматриваются векторные пространства, линейные операторы, их характеристические числа и собственные векторы. Особо выделены линейные операторы «простой структуры», т. е. имеющие n линейно независимых собственных векторов, где n — размерность пространства.

В четвертой главе излагаются понятия характеристического и минимального многочленов матрицы, в частности метод Д. К. Фаддеева вычисления коэффициентов характеристического многочлена. В пятой главе изучаются функции от матрицы. Они применяются в этой же главе к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и к вопросу об устойчивости решения линейной системы. В шестой главе изложена теория λ-матриц и вопрос о нормальной форме матрицы. В седьмой главе приводится другой вывод нормальной формы матрицы, основанный на геометрической теории линейных операторов. Здесь же изложен метод А. Н. Крылова преобразования характеристического многочлена. В восьмой главе даны некоторые основные матричные уравнения. В конце главы рассмотрены извлечение корня из матрицы и логарифм матрицы. В девятой главе автор переходит к унитарным и евклидовым пространствам. Рассмотрены нормальные операторы и их спектр, а также полярное разложение оператора.

Глава десятая содержит теорию квадратичных и эрмитовых форм. Изложена теория пучков форм и ее применение к малым колебаниям механических систем. Заканчивается глава теорией ганкелевых форм. Дальнейшие главы выделены автором во вторую часть книги «Специальные вопросы и приложения». В одиннадцатой главе рассматриваются комплексные симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы и их нормальные формы.

Двенадцатая глава содержит теорию строгой эквивалентности пучков матриц с приложениями к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В тринадцатой главе изучаются матрицы с действительными неотрицательными элементами. Выделены, в частности, стохастические матрицы и рассмотрены их связи с однородными цепями Маркова. Рассмотрены также осцилляционные матрицы.

В четырнадцатой главе приведены приложения теории матриц к системам дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изложены основы теории приводимых систем, критерий Ляпунова устойчивости по первому приближению, теория матрицанта и мультипликативного интеграла. Указывается ошибочность одного утверждения Вольтерра и одной теоремы Биркгофа. Заканчивается глава кратким обзором работ Лаппо-Данилевского. Наконец, в пятнадцатой главе рассматриваются приложения теории матриц к проблеме Рауса—Гурвица о числе корней многочлена, лежащих в левой полу-

плоскости, а также обобщения этой проблемы и ее разнообразные связи с другими разделами математики.

Число опечаток (в том числе и не указанных в списке опечаток) довольно велико. *А. Г. Курош*

594 РЕЦ. Теория матриц. Перлис (Theory of matrices. Perlis Sam, pp. 237, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, 1952, 5.50 doll.) [**Рецензия: Браун** (Brown Howard H.), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 1, 83 (англ.)]

595 РЕЦ. Алгебра векторов и матриц. Уэйд (Algebra of vectors and matrices, Wade T. L., Addison-Wesley; Cambridge, Mass. 1951; pp. IX+189, 4.50 doll.) [**Рецензии: Миллер** (Miller Carman E.), Math. Mag., 1953, 26, № 4, 231 (англ.); (**К. А. Н**), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 159—160 (англ.)]

596 РЕЦ. Введение в теорию] линейных пространств. Шилов Г. Е. Под ред. Ефимова Н. В., 384 стр., Гостехиздат. М.— Л., 1952, 7 р. 30 к. [**Рецензия: Фомин С. В.**, Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 2 (54), 178—181)]

597 РЕЦ. Линейные преобразования в n-мерном векторном пространстве. Введение в теорию гильбертовых пространств. Хамбергер, Гримшоу (Linear transformations in n-dimensional vector space. An introduction to the theory of Hilbert space. Hamburger H. L., Grimshaw M. E., pp. X+195, Cambridge University Press, 1951, 4.50 doll.) [**Рецензии: Дей** (Day M. M.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 98—99 (англ.); (**J. L. B. C.**), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 156—157 (англ.)]

ГРУППЫ

598. Факторизация n-разрешимых и n-нильпотентных групп. Бер (Factorization on n-soluble and n-nilpotent groups. Baer Reinhold), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 15—26 (англ.)

Элементы x и y группы G называются n-перестановочными, если $(xy)^n = x^n y^n$ и $(yx)^n = y^n x^n$. Элемент x группы G называется n-элементом, если $x^{n^i} = 1$ для некоторого натурального числа i, и Pn-элементом, если его порядок взаимно прост с n. Группа, все элементы которой являются n-элементами (Pn-элементами), называется n-группой (Pn-группой).

Группа называется n-абелевой, если любые два ее элемента n-перестановочны. Такие группы рассматривались ранее Леви (Levi F., J. Indian Math. Soc., 1944, **8**, 1—7). Элементы конечного порядка всякой n-абелевой группы составляют подгруппу, являющуюся прямым произведением n-группы, $(1 — n)$-группы и абелевой Pn $(1 — n)$-группы.

Группа, обладающая конечным инвариантным рядом с n-абелевыми факторами, называется n-разрешимой. Если порядок конечной n-разрешимой группы G есть произведение двух взаимно простых чисел h и k, а каждое из чисел n и $1 — n$ взаимно просто по крайней мере с одним из чисел h и k, то G есть произведение (не обязательно прямое) двух своих подгрупп порядков h и k. Если n $(1 — n)$ взаимно просто с одним из чисел h или k, то любые две подгруппы порядка h сопряжены в G. Эти предложения обобщают известные результаты Холла (Hall P., J. Longon Math. Soc., 1928, **3**, 98—105) о конечных разрешимых группах.

Элементы группы G, n-перестановочные с любым элементом из G, составляют характеристическую подгруппу, называемую n-центром G. Группа G называется n-нильпотентной, если существует такой конечный инвариантный ряд $1 = Z_0(G; n) \subset Z_1(G; n) \subset \ldots \subset Z_k(G; n) = G$, что $Z_i(G; n)/Z_{i-1}(G; n)$ есть n-центр группы $G/Z_{i-1}(G; n)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Любая конечная n-нильпотентная группа является прямым произведением n-группы, $(1\text{-}n)$-группы и нильпотентной $Pn(1 — n)$-группы.

В. М. Глушков

599. О прямых разложениях абелевых групп. Селе (On direct decompositions of Abelian groups. Szele T.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 247—250 (англ.)

Периодическая абелева группа называется r-ограниченной, если она содержит элемент наибольшего порядка r. Автор называет r-ограниченную группу T-регулярной, если всякий элемент a этой группы содержится в подгруппе $\frac{r}{p(a)} T$, где $p(a)$ — порядок элемента a.

Доказывается теорема:

Регулярная r-ограниченная подгруппа A абелевой группы G тогда и только тогда является прямым слагаемым группы G, когда $A \cap rG = 0$.

Показывается, что из этой теоремы легко следуют некоторые известные теоремы теории абелевых групп, в том числе следующие:

1) Если максимальная периодическая подгруппа T смешанной абелевой группы G ограничена, то T является прямым слагаемым этой группы (теорема Бера и Фомина).

2) Всякая абелева группа, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, является прямой суммой конечного числа циклических примарных групп и групп типов p^∞ (теорема Куроша).

3) Абелева группа, содержащая отличные от нуля элементы конечного порядка, неразложима тогда и только тогда, когда она является либо циклической примарной группой, либо группой типа p^∞ (теорема, доказанная референтом).

Автор утверждает, что абелева группа является регулярной r-ограниченной тогда и только тогда, когда она разложима в прямую сумму циклических подгрупп порядка r. На самом деле это верно только в том случае, когда r есть степень простого числа; если же r не является степенью простого числа, то существуют регулярные r-ограниченные абелевы группы, не разложимые в прямую сумму циклических подгрупп порядка r; например, $G = \{a\} + \{b\} + \{c\}$, где $2a = 2b = 3c = 0$.

Л. Я. Куликов

600. Верхние гомологии в расширениях групп. Хошшилд, Сер (Cohomology of group extensions. Hochschild G., Serre J. P.),

Trans. Amer. Math. Soc.,1953, 74, № 1, 110—134 (англ.)

Изучается связь между верхними группами гомологий группы G, ее нормального делителя K и фактор-группы G/K.

Пусть G — группа операторов для абелевой группы M; $A^n = C^n(G, M)$ — группа неоднородных n-мерных цепей; d — граничный оператор; $A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Пусть через $A^{j,p}$ обозначена подгруппа A^{j+p}, состоящая из тех цепей, значение которых равно нулю, если только какие-нибудь $p+1$ из аргументов принадлежат нормальному делителю K. Группы $A_j = \sum_{p=0}^{\infty} A^{i,p}$ определяют так называемую фильтрацию группы A. Фильтрация группы A следующим образом приводит нас к спектральной последовательности. Пусть через $Z_r^{i,j}$ обозначена совокупность тех x из $A^{i,j}$, для которых $dx \in A_{i+r}$, $B_r^{i+j} = dZ_r^{i-r,\,j+r-1}$, $Z_\infty^{i,j}$ — циклы, а $B_\infty^{i,j}$ — границы из $A^{i,j}$; $E_r^{i,j} = Z_r^{i,j} / (Z_{r-1}^{i+1,\,j-1} + B_{r-1}^{i,j})$; $E_\infty^{i,j} = Z_\infty^{i,j} / (Z_\infty^{i+1,\,j-1} + B_\infty^{i,j})$.

Группы $E_r = \sum_{i,j} Z_r^{i,j} / Z_{r-1}^{i+1,\,j-1} + B_{r-1}^{i,j})$ и составляют спектральную последовательность, связанную с фильтрацией (A_j) группы A. Группа E_∞ является пределом групп E_r в том смысле, что при данных i, j и при достаточно большом r имеем $E_r^{i,j} = E_{r+1}^{i,j} = \ldots = E_\infty^{i,j}$.

Как известно, группа E_{r+1} изоморфна группе гомологий группы E_r относительно оператора $d_r : E_r^{i,j} \to E_r^{i+r,\,j-r+1}$, который естественным образом индуцируется оператором d.

Для группы $H^n(G, M)$ имеем разложение

$$H^n(G, M) = H^n(A) =$$

$$= D^{0n} \supset D^{1,n-1} \supset \ldots \supset D^{n,0} \supset D^{n+1,-1} = 0,$$

где $D^{i,j} = Z_\infty^{i,j} / B_\infty^{i,j}$, $D^{i,j} / D^{i+1,\,j-1} \approx E_\infty^{i,j}$.

Доказывается, что $E^{i,j} = C^i(G/K, H^j(K, M))$, $E_r^{i,j} = H^i(G/K, H^j(K, M))$ (при надлежащем определении операторов из G/K для $H^j(K, M)$). В частности, $E^{0,j} = H^j(K, M)$, $E_r^{i,0} = H^i(G/K, M^K)$, $E_r^{0,j} = H^j(K, M)^G$ (группы M^K и $H^j(K, M)^G$ обозначают подгруппы инвариантных элементов относительно K и G соответственно).

Для группы A устраивается еще одна фильтрация, которая приводит к той же спектральной последовательности. Пусть $A^{*j,i}$ — группа тех $f \in C^{j+i}(G, M)$, для которых $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \tau_1, \ldots, \tau_j) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \tau_1', \ldots, \tau_j')$, если только $\tau_1 \equiv \tau_1', \ldots, \tau_j \equiv \tau_j' \pmod K$. $A_i^* = \sum_{j=0}^{\infty} A^{*j,i}$. Группы E_r^* $(r \geqslant 1)$, построенные для фильтрации (A_j^*), изоморфны группам E_r.

Вышеизложенное составляет основное содержание второй главы, занимающей центральное место в работе. В первой главе дано несколько иное построение спектральной последовательности, приводящее к тому же результату.

В третьей главе выводятся некоторые следствия, вытекающие из теорем о спектральной последовательности, доказанных во второй главе. Укажем здесь на следующие теоремы:

1. Если для конечной группы G порядок и индекс нормального делителя K взаимно просты, то для $j > 0$

$$H^j(G, M) \approx H^j(K, M)^G + H^j(G/K, M^K).$$

2. Если $H^n(K, M) = 0$ при $0 < n < m$, то имеет место следующая точная последовательность:

$$H^m(G/K, M^K) \to H^m(G, M) \to H^m(K, M)^G \to$$
$$\to H^{m+1}(G/K, M^K) \to H^{m+1}(G, M).$$

3. Если $H^n(K, M) = 0$ для $n = 2, \ldots, m$, то имеет место точная последовательность:

$$H^m(G/K, M^K) \to H^m(G, M) \to$$
$$\to H^{m-1}(G/K, H^1(K, M)) \to H^{m+1}(G/K, M^K) \to$$
$$\to H^{m+1}(G, M).$$

Д. К. Фаддеев

601. Характеристические свойства характеров групп конечного порядка. Брауэр (A characterization of the characters of groups of finite order. Brauer Richard), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 357—377 (англ.)

В работе изучаются свойства характеров конечных групп. Попутно получаются некоторые результаты, относящиеся к структуре самих групп. В заключительном параграфе даются приложения к теории модулярных характеров. Автор отмечает тесную связь развиваемой теории с теорией индуцированных характеров (Brauer R., Ann. Math., 1947, 48, 502—514).

Обобщенным характером группы $\mathfrak{G}$ называется линейная комбинация неприводимых характеров с целыми коэффициентами. Группа $\mathfrak{E}$ называется «элементарной», если она является прямым произведением циклической группы $\mathfrak{A}$ порядка a и p-группы $\mathfrak{P}$, причем числа a и p взаимно просты.

Приведем основные результаты:

1) Следующие условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы комплекснозначная функция $\Theta(G)$, определенная на группе $\mathfrak{G}$, была обобщенным характером группы $\mathfrak{G}$: I. Θ есть функция классов сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$. II. Для каждой «элементарной» подгруппы $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$ функция Θ есть обобщенный характер группы $\mathfrak{E}$.

2) Для того чтобы функция Θ была неприводимым характером группы $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо условий I и II, были выполнены условия:

III. Среднее значение Θ^2 равно 1, т. е. $\sum_{G \in \mathfrak{G}} \Theta(G)^2 = g$ (g — порядок группы $\mathfrak{G}$). IV. $\Theta(1)$ — неотрицательное число.

3) Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы функция $\Theta(G)$ была линейным характером группы $\mathfrak{G}$, являются условия: I. Θ — функция классов, не равная тождественно нулю. II. Если A и B — коммутирующие элементы группы $\mathfrak{G}$, порядки которых взаимно просты, или если элементы A и B принадлежат p-подгруппе группы $\mathfrak{G}$, то $\Theta(AB) = \Theta(A)\Theta(B)$.

Устанавливается связь между модулярными характерами и обобщенными характерами группы $\mathfrak{G}$.

4) Пусть p — простое число и p^α — наивысшая степень числа p, на которую делится порядок g группы $\mathfrak{G}$. Если φ — модулярный характер группы $\mathfrak{G}$, то, полагая

$$\Theta(G)=\begin{cases} p^\alpha\varphi(G) \text{ для } p\text{-регулярных элементов } G \text{ из } \mathfrak{G} \\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

получим (обыкновенный обобщенный характер группы $\mathfrak{G}$.

Ю. А. Гольфанд

602. О полиномах Пуанкаре классических групп (Дополнение). Мурнаган (On the Poincaré polynomials of the classical groups.— Addendum. Murnaghan F. D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 1, 48 (англ.)

Уточняя свой предыдущий результат (Murnaghan F. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, **38**, 608—611), автор дает арифметическую характеристику чисел Бетти n-мерной линейной группы.

Ю. А. Гольфанд

603. Элементы дифференциального исчисления и теории распределений на локально компактных абелевых группах. Рисс (Eléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts. Riss J.), Acta math., 1953, **89**, № 1—2, 45—105 (франц.)

Пусть $t \to r(t)$ — непрерывное гомоморфное отображение аддитивной группы вещественных чисел R в локально компактную абелеву группу G. Комплексная функция $f(x)$, заданная на G, называется дифференцируемой по r в точке x_0, если функция $\varphi(t) = f(x_0 + r(t))$ дифференцируема при $t = 0$. $\varphi'(0) \equiv d_r f(x_0)$. Если функция $f(x)$ дифференцируема по всем r, то она называется дифференцируемой в x_0. Из дифференцируемости не следует непрерывность. Примерами дифференцируемых функций являются линейные комбинации характеров. Совокупность функций, равных нулю вне некоторого компактного множества и допускающих применение любого дифференциального многочлена вида $\sum c_{a_1,\ldots,a_n} d_{r_1}^{a_1} \cdots d_{r_n}^{a_n}$, обозначается через $\mathfrak{D}(G)$. Если $f(x) \in \mathfrak{D}(G)$, то отображение $r \to d_r f(x_0)$ является линейным функционалом в пространстве $\mathfrak{R}(G)$ всех r. Для каждого открытого множества U найдется принадлежащая $\mathfrak{D}(G)$ функция $f(x)$, равная нулю вне U, причем $f(x) \not\equiv 0$, $f(x) \geqslant 0$.

Через $\mathfrak{H}(G)$ обозначается совокупность таких компактных подгрупп $H \subset G$, что размерность дополнения $\mathfrak{R}(H)$ в $\mathfrak{R}(G)$ конечна. Через $d(K, H)$ обозначим подпространство в $\mathfrak{D}(G)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль вне компактного множества K и постоянных на классах смежности по подгруппе H из $\mathfrak{H}(G)$. Распределением на G называется линейный функционал на $\mathfrak{D}(G)$, непрерывный на каждом подпространстве $d(K, H)$ (см. Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, Actualités Scient. et Industr., № 1091, 1122).

Пространство всех распределений обозначается $\mathfrak{D}'(G)$. Для распределений можно ввести понятия предела, умножения дифференциального многочлена на распределение, тензорного произведения, свертывания (для случая, когда хотя бы одно из распределений равно нулю вне некоторого компактного множества) и т. д. Ряд теорем Шварца о распределениях на евклидовых пространствах обобщается на распределения из $\mathfrak{D}'(G)$. Для каждого распределения существует максимальное открытое множество T, на котором оно равно нулю. Дополнение к T называется носителем распределения. Распределения с точечным носителем сводятся на каждом подпространстве функций, постоянных на классах смежности по H из $\mathfrak{H}(G)$, к распределениям, порождаемым дифференциальными многочленами (дифференциальный многочлен D порождает распределение $f(x) \to Df(x_0)$.

Путем некоторого изменения определения пространств $\mathfrak{D}(G)$ и $\mathfrak{D}'(G)$ вводится класс распределений, допускающих преобразования Фурье. При помощи этого преобразования изучаются распределения, спектр которых (т. е. носитель их преобразования Фурье) является нулевым элементом группы характеров.

Н. Я. Виленкин

604. Теоремы вложения для абелевых Г-групп. Конрад (Embedding theorems for abelian groups with valuations. Conrad Paul F.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 1—29 (англ.)

Вводится понятие Г-группы, обобщающее понятие частично упорядоченной группы. Пусть Γ — произвольное частично упорядоченное множество. Абелева операторная R-группа A называется Г-группой, если каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ соответствует пара допустимых подгрупп A_γ, A^γ группы A, удовлетворяющих условиям: 1) $A_\gamma \subseteq A^\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$; 2) из $\alpha < \beta$ следует, что $A^\alpha \subseteq A_\beta$; 3) для каждого элемента $a \in A$ существует по крайней мере одно γ, такое что $a \in A^\gamma, a \notin A_\gamma$; 4) если $a \notin A^\gamma$, то существует $\beta > \gamma$, для которого $a \in A^\beta$ и $a \notin A_\beta$. Фактор-группы A^γ / A_γ называются γ-факторами группы A. Если $a \in A^\gamma, a \notin A_\gamma$, то γ называется значением (*value*) элемента a. Всякая подгруппа S Г-группы A является Г-группой, причем $S_\gamma = S \cap A_\gamma$, $S^\gamma = S \cap A^\gamma$ для каждого γ из Γ. Изоморфизм σ группы A в B называется Г-изоморфизмом A в B, если γ является значением a из A, тогда и только тогда, когда γ является значением $a\sigma$ из B.

Подгруппа $B \subset A$ называется c-подгруппой A (A называется c-расширением B), если $A^\gamma = A_\gamma + B^\gamma$ для каждого γ из Γ. Группа A c-замкнута, если она не допускает собственного c-расширения. Для множества групп $B(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, Г-суммой $V(\Gamma, B(\gamma))$ называется Г-группа, элементами которой являются системы $v = \{b_\gamma\}$, $b_\gamma \in B_\gamma$, причем множество индексов отличных от нуля элементов b_γ удовлетворяет условию обрыва возрастающих

цепей. Сложение и умножение на элементы из R определяются покомпонентно. При этом

$$V^\gamma = \{v = \{b_\beta\},\ b_\alpha = 0 \text{ при } \alpha > \gamma\}$$
$$V_\gamma = \{v = \{b_\beta\},\ b_\alpha = 0 \text{ при } \alpha \geqslant \gamma\}.$$

$V(\Gamma, A^\gamma / A^\gamma)$ обозначается через $V(A)$.

Строится теория Г-групп, основным результатом которой является следующая теорема вложения. Если R — тело, то существует Г-изоморфизм σ группы A на c-подгруппу $V(A)$ со свойством: $(a\sigma)_\gamma = A_\gamma + a$ для каждого $a \in A$ и каждого $\gamma \in \Gamma$.

Группа A Г-изоморфна $V(A)$ тогда и только тогда, когда она c-замкнута. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для продолжаемости Г-изоморфизма подгрупп двух Г-сумм до Г-изоморфизма самих Г-сумм. Как следствие получается сопряженность любых двух c-вложений A в $V(A)$ относительно Г-автоморфизма $V(A)$.

Полученные результаты переносятся на абелевы группы без кручения без операторов с добавлением к определению Г-группы свойства: A_γ, A^γ сервантны в A для каждого $\gamma \in \Gamma$.

Всякую абелеву частично упорядоченную группу со свойством: из $na > 0$ следует $a > 0$, можно рассматривать, как Г-группу; поэтому все полученные результаты справедливы для частично упорядоченных групп. Частично упорядоченной Г-группой в строгом смысле называется Г-группа, у которой γ-факторы частично упорядочены и ни один γ-фактор не содержит собственных выпуклых подгрупп. Для таких групп определяется $V_r(A)$ как Г-сумма $V(\Gamma, R_\gamma)$, где R_γ — либо упорядоченная группа действительных чисел (если A^γ / A_γ упорядочено), либо группа рациональных чисел (если A^γ / A_γ тривиально упорядочено). Частичная упорядоченность вносится в $V_r(A)$ при помощи определения: $v > 0$, если $v \neq 0$, и для каждого γ, являющегося значением v, R_γ — упорядоченная группа действительных чисел и $v_\gamma > 0$. Доказывается, что каждая частично упорядоченная Г-группа в строгом смысле может быть вложена в $V_r(A)$. Из этой теоремы в качестве следствия получается известная теорема Хана о вложении упорядоченных абелевых групп. Вводится понятие a-расширения для Г-групп — аналог архимедова расширения для упорядоченных групп; в связи с этим устанавливаются дополнительные свойства Г-групп.

Е. П. Шимбирева

605 Д. **Вполне факторизуемые группы. Баева Н. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Молотовский гос. ун-т, Молотов, 1953

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

606. **Теория действительных точек. Ланг** (The theory of real places. Lang Serge), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 378—391 (англ.)

Специализацию φ, отображающую поле K в поле L (с присоединенным элементом ∞), автор называет действительной, если поле L является формально действительным. Отправляясь от этого определения, тесно связанного с понятием действительной точки алгебраического многообразия, автор доказывает следующие утверждения:

1. Если поле K имеет хотя бы одну действительную специализацию, то оно формально действительно.

2. Любая специализация формально действительного поля K со значениями в действительно замкнутом поле P может быть продолжена до специализации действительного замыкания $\overline{K}$ поля K, причем значения продолженной специализации будут также принадлежать P.

3. Пусть K — формально действительное поле алгебраических функций над формально действительным полем F. Если элемент ξ поля K обладает тем свойством, что для любой нульмерной действительной специализации φ либо $\varphi(\xi)=\infty$ либо $\varphi(\xi)\geqslant 0$ при любом упорядочении поля значений этой специализации, то ξ является суммой квадратов элементов поля K.

Последнее предложение является обобщением известной теоремы о представимости положительно определенных форм суммами квадратов.

Рассматривается вопрос о действительных решениях систем однородных уравнений нечетных степеней. Указывается, что если поле P действительно замкнуто и $(f_1, \ldots, f_r)$ — система r-форм нечетных степеней от n-неизвестных с коэффициентами из P, то при $n > r$ система уравнений $f_1 = \ldots = f_r = 0$ имеет в поле P нетривиальное решение. *А. И. Узков*

607. **К топологической теории полей. Ковальский** (Zur topologischen Kennzeichnung von Körpern. Kowalsky Hans-Joachim), Math. Nachr., 1953, 9, № 5, 261—265 (нем.)

Даются необходимые и достаточные условия нормируемости топологических полей, из которых выводятся теорема Понтрягина о классификации локально компактных связных полей с первой аксиомой счетности и теорема Джекобсона о локально компактных полях. Этих результаты были ранее получены И. Р. Шафаревичем (Докл. АН СССР, 1943, 40, 149—151). *Н. Я. Виленкин*

608. **О топологических телах и их оценках. Флейшер** (Sur les corps topologiques et les valuations. Fleischer Isidore), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 13, 1320—1322 (франц.)

Известно (см. Bourbaki, Groupes topologiques, 1947, стр. 57), что для того чтобы топология некоторого тела K индуцировалась неархимедовой оценкой (valuation) со значениями в упорядоченной абелевой группе, необходимо следующее условие:

Для любой окрестности нуля U множество $(K \setminus U)^{-1}$ ограничено (множество X топологического тела называется ограниченным, если для любой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V, что $VX \subset U$ и $XV \subset U$).

В работе доказывается, что если коммутант тела ограничен, то это условие оказывается также и достаточным. *М. М. Постников*

609. **О кольцах многочленов двух переменных. Кюлк** (On polynomial rings in two variables.

Kulk W. van der), Nieuw arch. wiskunde, 1953, 1, № 1, 33—41 (англ.)

Пусть R — кольцо многочленов двух переменных x и y над полем Δ. Автор называет систему (u, v) двух многочленов $u, v \in R$ базисом R, если все многочлены из R могут быть записаны в виде многочленов от u и v.

Переход $(u, v) \to (u', v')$ называется линейным, если u' и v' являются линейными многочленами от u и v с коэффициентами из Δ и отличным от нуля определителем их однородных частей.

Этот переход называется полулинейным, если u' и v' связаны с u и v формулами $u' = u$, $v' = v + f(u)$, где $f(u)$ — многочлен от u (с коэффициентами из Δ), степень которого больше единицы. Очевидно, что пары (u, v) и (u', v'), получаемые одна из другой линейным или полулинейным переходами, одновременно либо являются, либо не являются базисами R.

Основной результат работы:

Пара (u, v) элементов R является базисом R тогда и только тогда, когда она получается из пары (x, y) конечной последовательностью линейных или полулинейных переходов.

Если из таких последовательностей переходов рассматривать только несократимые, то для них имеет место своеобразная теорема единственности, из которой, в частности, следует независимость числа полулинейных переходов от выбора несократимой последовательности, превращающей (x, y) в (u, v).

А. И. Узков

610. Разложение на множители в некоторых кольцах многочленов. Мак-Кой (Factorization of certain polynomials over a commutative ring. McCoy Neal H.), Duke Math. J., 1953, 20, № 1, 113—118 (англ.)

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $R[x]$ — кольцо многочленов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ над R. Элемент $f \in R[x]$ называется слабо неприводимым, если для любого его разложения $f = gh$ найдутся идемпотентные элементы $e_1, e_2 \in R$ и элементы $c_i, d_i \in e_i R[x]$ $(i = 1,2)$, удовлетворяющие соотношениям $e_1 + e_2 = 1$, $c_i d_i = e_i$ $(i = 1,2)$, $g = c_1 + c_2 f$, $h = d_1 f + d_2$.

Доказывается следующее предложение:

Пусть N — радикал кольца R; $\mathfrak{P}_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ — простые идеалы R, пересечение которых совпадает с радикалом. Если f — примитивный многочлен из $R[x]$ и если его образ f_α при естественном гомоморфном отображении кольца $R[x]$ в любое кольцо $R/\mathfrak{P}_\alpha[x]$ неприводим над полем частных кольца $R/\mathfrak{P}_\alpha$, то f слабо неприводим над R.

Из этого результата следует:

1) Многочлен с целочисленными коэффициентами, неприводимый над любым полем, слабо неприводим над любым кольцом.

2) Если многочлен с целочисленными коэффициентами неприводим над любым полем, характеристика которого отлична от простых чисел $p_1, \ldots, p$, то он слабо неприводим над любым кольцом, аддитивная группа которого не содержит элементов порядков p_i $(i = 1,2, \ldots, k)$.

А. И. Узков

611. Тождества *PI*-колец. Амицур (The identities of *PI*-rings. Amitsur S. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 27—34 (англ.)

Ассоциативное кольцо S над кольцом Ω операторов автор называет *PI*-кольцом (a ring with polynomial identity), если элементы S удовлетворяют полиномиальному тождеству $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ с коэффициентами из Ω. Предполагается, что Ω — область целостности с бесконечным числом элементов, причем из $\alpha S = 0$, $\alpha \in \Omega$, следует $\alpha = 0$.

Известно, что любое кольцо, удовлетворяющее всем тождествам, имеющим место на S, есть гомоморфный образ кольца $\Omega[x]/Q_s$, называемого универсальным для S; здесь $\Omega[x]$ — кольцо многочленов от достаточного множества переменных x_i, а Q_s — идеал, образованный полиномами $g(x_1, \ldots, x_n)$, обращающимися тождественно в нуль на S.

В работе доказывается, что радикал Джекобсона универсального кольца есть его максимальный ниль-идеал. Из этой теоремы и анализа тождественных соотношений на полных матричных кольцах выводится, что всякое свободное кольцо является подпрямой суммой полных матричных колец конечного порядка над кольцом целых чисел, откуда следует, что всякое нильпотентное кольцо индекса нильпотентности n есть гомоморфный образ подпрямой суммы матричных колец, порядок которых не превосходит $[(n+1)/2]$.

Доказывается также, что каждое *PI*-кольцо удовлетворяет тождеству вида $[S_{2n}(x)]^m = 0$, где $S_{2n} = \sum \pm x_1 x_2 \ldots x_n$ (положительный знак берется для четных, отрицательный—для нечетных перестановок индексов).

В заключение высказывается гипотеза, что все тождества на полном матричном кольце Ω_n являются следствиями стандартного тождества $S_{2n} = 0$.

А. И. Мальцев

612. Правые *H-алгебры. Смайли** (Right H^*-algebras. Smiley M. F.), Proc., Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 1—4 (англ.)

Амброзе (Ambrose W., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 57, 364—386) назвал нормированное кольцо (банахову алгебру) H^*-алгеброй, если одновременно оно является гильбертовым пространством и для любых x, y, u и v существуют решения u^* и v^* уравнений $(xu, y) = (x, yu^*)$, $(vx, y) = (x, v^*y)$. Несколько более общее образование, в котором предполагается разрешимость лишь первого из указанных уравнений, автор называет правой H^*-алгеброй.

Алгебра A называется чистой (proper), если из $Ax = 0$ вытекает $x = 0$. Показывается, что каждая чистая правая H^*-алгебра разлагается в прямую сумму некоторых конкретных правых H^*-алгебр («матричных», по терминологии автора).

Г. Е. Шилов

613. Асимптотические разложения с алгебраической точки зрения. Попкен (Asymptotic expansions from an algebraic standpoint. Popken J.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. A, 1953, 56, № 2, 134—143; Indagationes math., 1953, 15, № 2, 131—143 (англ.)

Сначала излагаются известные результаты из теории псевдонормированных коммутативных колец,

т. е. колец $\mathfrak{X}$, на которых определена функция $\varphi(a)$, $a \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(a) \geqslant 0$; 2) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) > 0$; 3) $\varphi(ab) \leqslant \varphi(a)\varphi(b)$; 4) $\varphi(a-b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$ и называемая псевдонормой. Если вместо 4) выполняется более сильное условие 4*) $\varphi(a-b) \leqslant \operatorname{Max}\{\varphi(a), \varphi(b)\}$, то псевдонорма называется неархимедовой. Автор переходит обычным образом от кольца $\mathfrak{X}$ к кольцу вычетов $\mathfrak{R} = \mathfrak{X}/\mathfrak{J}$ по идеалу $\mathfrak{J}$ всех тех элементов a, на которых $\varphi(a) = 0$, и получает нормированное кольцо $\mathfrak{R}$, удовлетворяющее условию $\varphi(A) > 0$ при $A \neq 0$.

В этом кольце исследуются вопросы сходимости последовательностей и рядов и правила операций с рядами, главным образом для случая неархимедовой нормы. Так, например, для сходимости ряда $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ в полном кольце $\mathfrak{R}$ с неархимедовой нормой необходимо и достаточно, чтобы $A_n \to 0$ (ср. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, I, М. — Л., 1947, 306, где аналогичный результат доказан для нормированных полей).

Изложенные результаты применяются к кольцу $\mathfrak{X}_0$ всех функций $a(z)$, определенных на некотором фиксированном неограниченном множестве G комплексной z-плоскости и удовлетворяющих на G условию:

$$a(z) = O(|z|^{\lambda}), \quad \text{если } |z| \to \infty,$$

при некотором действительном λ, зависящем от $a(z)$. Если λ_0 — нижняя грань тех λ, для которых выполнено это условие, то равенство $\varphi(a) = e^{\lambda_0}$ определяет неархимедову псевдонорму в $\mathfrak{X}_0$. Кольцо вычетов $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{X}_0/\mathfrak{J}$ состоит в этом случае из классов так называемых асимптотически равных функций; (две функции $a(z)$, $b(z)$ называются асимптотически равными, если $a(z) - b(z) = O(|z|^{-\omega})$ при $|z| \to \infty$, $z \in G$, для всех натуральных ω). Один из основных результатов состоит в том, что $\mathfrak{R}_0$ — полное кольцо.

Из этого факта просто выводятся известные результаты теории асимптотических разложений.

В заключение некоторые из этих результатов автор распространяет на асимптотические интегралы. *М. А. Наймарк*

614. О простых альтернативных кольцах. Клейнфелд (On simple alternative rings. Kleinfeld Erwin), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 98—104 (англ.)

Устанавливается, что следующие условия необходимы и каждое из них является достаточным для того, чтобы простое неассоциативное альтернативное кольцо было алгеброй Кэли-Диксона: 1) Вне центра кольца существует элемент x, квадрат которого отличен от нуля и лежит в центре кольца. 2) В кольце существуют попарно антикоммутативные элементы a, b, c, ассоциатор которых $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ не является делителем нуля.

Изложение чрезвычайно сжатое. В примечании, сделанном при корректуре, автор указывает на то, что наложенные в работе ограничения им уже сняты и теперь он может доказать, что всякое простое неассоциативное альтернативное кольцо является алгеброй Кэли-Диксона. *Л. А. Скорняков*

615. Делители нуля и коммутативность колец. Мак-Лафлин, Розенберг (Zero divisors and commutativity of rings. McLaughlin J. E., Rosenberg Alex), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 203—212 (англ.)

Кольцо A называется кольцом Цорна, если оно альтернативно и для всякого не нильпотентного элемента a из A существует такой элемент b, что $(ba)^2 = ba \neq 0$. Показывается, что если множество L левых делителей нуля кольца Цорна A образует отличный от A левый идеал, то L является радикалом R (определение радикала см. Smiley M. F., Ann. Math., 1948, 49, 702—709); при этом A/R оказывается телом. Обратно, если в кольце Цорна A фактор-кольцо A/R является телом, то L совпадает или с A, или с R. Очевидно, аналогичная теорема справедлива и для множества П правых делителей нуля. Может случиться, что L совпадает с A, а П — с R, или наоборот. Соответствующие результаты доказываются и для действительных банаховых алгебр в предположении, что L и П — множества топологических делителей нуля (соответственно, левых и правых). При этом A/R будет либо полем действительных или комплексных чисел, либо телом кватернионов.

Если все делители нуля кольца Цорна A лежат в его центре C, не совпадающем с A, то либо A является телом, либо $L = R \neq 0$. Во втором случае A/R и C/R оказываются полями; указывается взаимосвязь между этими двумя полями. Если же все топологические делители нуля действительной банаховой алгебры A лежат в ее центре, то A либо коммутативно, либо является телом кватернионов.

Наконец, предполагается, что A является альтернативной алгебраической алгеброй над квазиалгебраически замкнутым совершенным полем. Не вдаваясь в определение этого класса полей, отметим, что к нему принадлежат алгебраически замкнутые и конечные поля. Если все нильпотентные элементы лежат в центре алгебры A, то A оказывается ассоциативной или коммутативной. *Л. А. Скорняков*

616. Плотные структуры и структуры с полудополнениями. Сас (Dense and semi-complemented lattices. Szasz G.), Nieuw arch. wiskunde, 1953, 1, № 1, 42—44 (англ.)

Элемент a структуры L с нулем называется плотным в L, если уравнение $a \cap x = 0$ обладает только тривиальным решением $x = 0$; в противном случае a не плотен в L, а решение x называется полудополнением a. Структура L, все элементы $a \neq 0$ которой плотны в L, называется плотной. Структура L, все элементы $a \neq 1$ (если единица существует) которой не плотны в L, называется структурой с полудополнениями. Доказывается, что

1) структура плотна тогда и только тогда, когда 0 в ней неразложим;

2) полумодулярная структура конечной длины является структурой с полудополнениями тогда и только тогда, когда она является структурой с дополнениями;

3) если полная дистрибутивная структура с полудополнениями удовлетворяет бесконечному дистрибутивному закону $a \cap \bigvee x_i = \bigvee (a \cap x_i)$, то она является структурой с дополнениями. *А. Х. Лившиц*

617. Мультипликативные гомоморфизмы матриц. Чеймберлин, Вулф (Multiplicative homomorphisms of matrices. Chamberlin

Eliot, Wolfe James), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 37—42 (англ.)

В кольце $\mathfrak{M}_n$ всех $n \times n$ матриц над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей выделяется мультипликативно замкнутое подмножество $\mathfrak{M}_n^*$, каждый элемент которого является произведением элементарных матриц $M_i(c) = E + (c-1)e_{ii}$ и $A_{ij}(c) = E + ce_{ji}$. Если R — евклидово кольцо, то $\mathfrak{M}_n^* = \mathfrak{M}_n$. Изучаются гомоморфные отображения Φ системы $\mathfrak{M}_n^*$ в алгебраическую систему G; они называются мультипликативными матричными гомоморфизмами (м. м. гомоморфизмы). При этом рассматриваются только такие системы G, у которых подмножество H, состоящее из нуля 0 и всех квадратных корней q из единицы e ($q^2 = e$), коммутативно. Гомоморфизм по умножению φ кольца R в G называется мультипликативным гомоморфизмом (м. гомоморфизм). Системы G, являющиеся м. м. гомоморфными образами $\mathfrak{M}_n^*$, обладают нулем 0 и единицей e, ассоциативны и, если $n > 2$ или $n = 2$ и H лежит в центре G, коммутативны. В этих случаях $\Phi(M_i(c)) = \Phi(M_j(c))$ и каждый м. м. гомоморфизм Φ индуцирует м. гомоморфизм $\varphi(c) = \Phi(M_i(c))$. Если кольцо R коммутативно и $n \neq 2$, то каждый м. м. гомоморфизм $\mathfrak{M}_n^*$ в G имеет вид $\Phi(B) = \varphi(|B|)$, где $|B|$ — определитель матрицы B, а φ—м. гомоморфизм R в G, однозначно определяемый Φ. Накладывая на G дополнительные ограничения: 1) H лежит в центре G, 2) в G нет делителей нуля, 3) если $q \in H$ и $qa = a$, $a \neq 0$, то $q = e$,—автор более детально исследует м. м. гомоморфизмы $\mathfrak{M}_n^*$ матриц порядка 2.

Е. Г. Шульгейфер

618. О полугруппах, допускающих существование одностороннего частного. Тесье (Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côté. Teissier Marianne), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 11, 1120—1122 (франц.)

Рассматриваются системы без идемпотента, в которых уравнение $xa = b$ разрешимо при любых a и b (системы с левым делением). Системой Бэра—Леви бесконечного множества E называется система всех взаимнооднозначных отображений α множества E в себя, при которых $E \setminus \alpha E$ бесконечно. Доказывается, что всякая система с левым делением, в которой из $xa = xb$ следует $a = b$, изоморфна некоторой подсистеме системы Бэра—Леви.

Пусть $\{E_i\}_{i \in I}$ — разбиение бесконечного множества E (I бесконечно; хотя бы одно из E_i содержит более одного элемента); H — система Бэра—Леви множества I. Обобщенной системой Бэра—Леви называется система всех отображений α множества E в себя, для которых 1) из $x, y \in E_i$ вытекает, что $\alpha(x) = \alpha(y)$; 2) всякому α соответствует одно и только одно $\beta \in H$, для которого из $x \in E_i$ вытекает, что $\alpha(x) \in E_{\beta(i)}$. Доказывается, что всякая система без идемпотента с левым делением изоморфна некоторой подсистеме обобщенной системы Бэра—Леви.

Н. Н. Воробьев

619. Некоторые свойства обобщенно-обратимых эквивалентностей в полугруппе. Тьеррен (Quelques propriétés des équivalences réversibles généralisées dans un demi-groupe. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1953, **236** № 14, 1399—1401 (франц.)

Дюбрей (Dubreil P., Mém. Acad. sci., arts et belles lettres, 1941, **63**, 1—52; Rend. Math., 1951, **10**, 183—200) построил и рассмотрел различные свойства некоторых отношений эквивалентности между элементами полугруппы (множество с одним бинарным ассоциативным действием). В настоящей статье обобщается построение Дюбрея. Упомянутые отношения эквивалентности строятся путем выделения в полугруппе D некоторого подмножества K.

Автор ослабляет требования, налагаемые на это подмножество, предполагая для K лишь то, что из $kx \in K$, где $x \in D$, $k \in K$, следует $x \in K$.

Е. С. Ляпин

620. Д. Некоторые вопросы теории неассоциативных колец и алгебр. Ширшов А. И. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., НИИ мех. и мат. МГУ, М., 1953

См. также 532, 533, 541, 544 **РЕЦ**, 567—570, 623, 624, 629, 642, 764 **РЕЦ**, 793 **РЕЦ**, 816—822, 824, 829, 859 **РЕЦ**, 902, 940. Работы по алгебраической геометрии см. в подразделе «Проективная, неевклидова и алгебраическая геометрии».

ТОПОЛОГИЯ

621. О гомеоморфных кругу поверхностях, погруженных в R^3. Капуано (Sur les surfaces homéomorphes à un disque dans un R^3. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 12, 1229—1231 (франц.)

Доказывается:

1) В R^3 существует гомеоморфный образ замкнутого квадрата, не являющийся собственной частью никакого гомеоморфного ему множества;

2) В R^3 существует такая счетная система $\{P_n\}$ нульмерных замкнутых множеств, что $R^3 \setminus \bigcup_n P_n$ не содержит никакого подмножества, гомеоморфного квадрату.

Для доказательства 2) автор выводит вспомогательное утверждение об аппроксимации рассечений призм.

О. В. Локуциевский

622. О размерности произведения пространств. Морита (On the dimension of product spaces. Morita Kiiti), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 205—225 (англ.)

Пусть X и Y — нормальные пространства конечной размерности. Доказывается неравенство

$$\dim(X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y$$

в предположениях значительно более общих, чем те, в которых оно было доказано раньше. Именно, достаточно выполнения каждого из следующих условий: 1) если топологическое произведение $X \times Y$ является S-пространством (т. е. в любое покрытие можно вписать звездноконечное покрытие); 2) если X — вполне нормальное пространство (т. е. во всякое покрытие можно звездно вписать другое покрытие), а Y — локально бикомпактное вполне нормальное пространство (следует заметить, что для хаусдорфовых пространств понятие полной нормальности совпадает с понятием паракомпактности); 3) если X — счетно паракомпактное (т. е. в каждое счетное покрытие можно вписать локально конечное покрытие), а Y — локально компактное метрическое пространство.

В случаях: 1) когда X — локально бикомпактное вполне нормальное пространство и Y—одномерное вполне нормальное пространство; 2) когда X — вполне нормальное пространство, а Y — локально конечный абстрактный полиедр, доказывается равенство

$$\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Ю. М. Смирнов

623. О комплексах с операторами. Экман (On complexes with operators. Eckmann Beno), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 1, 35—42 (англ.)

Комплексом $\mathscr{C}$ называется последовательность абелевых групп C_p ($p = -1, 0, 1, \ldots$), снабженных такими гомоморфизмами ∂: $C_{p+1} \to C_p$, что $\partial\partial C_p = 0$, если $p > 0$ и $\partial C_0 = C_{-1}$. Пусть J — произвольная группа. Группу всех гомоморфизмов f^p группы C_p в группу J обозначим через $\check{C}^p = \check{C}^p(\mathscr{C}, J)$. Полагая $\delta f^p(C_{p+1}) = f^p(\partial C_{p+1})$, определим гомоморфизм δ группы $\check{C}^p$ в группу $\check{C}^{p+1}$. Его ядро обозначим через $\check{Z}^p = \check{Z}^p(\mathscr{C}, J)$. Пусть R — произвольное кольцо с единицей e, $\Phi = \Phi(R, J)$ — R-модуль всех аддитивных гомоморфизмов кольца R в группу J (произведение гомоморфизма f на элемент $r' \in R$ определяется по формуле $(r'f)(r) = f(r'r)$) и Ψ — произвольный подмодуль модуля Φ. Предположим, что комплекс $\mathscr{C}$ является R-комплексом, т. е. все группы C_p являются R-модулями, а гомоморфизмы ∂ — R-гомоморфизмами. Пусть C^p_Ψ—подгруппа группы $\check{C}^p$, состоящая из таких гомоморфизмов f^p, что для любого элемента $c_p \in C_p$ выражение $f^p(rc_p)$ как функция от r принадлежит Ψ. Легко видеть, что $\delta C^p_\Psi \subset C^{p+1}_\Psi$. Фактор-группа $H^p_\Psi = Z^p_\Psi / \delta C^{p-1}_\Psi$ где $Z^p_\Psi = \check{Z}^p \cap C^p_\Psi$, называется p-ой группой ∇-гомологий комплекса $\mathscr{C}$ типа Ψ. Если $\Psi = \Phi$, то это обыкновенные группы ∇-гомологий, а если (в случае, когда J есть R-модуль) Ψ является подмодулем всех R-гомоморфизмов, то H^p_Ψ—известная группа $H^p(\mathscr{C}, J)$ эквивариантных ∇-гомологий. Если J является Q-модулем, где Q— некоторое подкольцо кольца R, и если Ψ — группа всех Q-гомоморфизмов, то H^p_Ψ — группа эквивариантных ∇-гомологий комплекса $\mathscr{C}$, рассматриваемого как Q-комплекс. Пусть A — произвольная группа и R_A — ее целочисленное групповое кольцо. Элементы $\varphi \in \Phi(R_A, J)$ суть не что иное, как функции на группе A со значениями в группе J. Пусть Ψ — подмодуль модуля Φ, состоящий из функций φ, отличных от нуля только на конечном числе элементов группы A. В этом случае группа H^p_Ψ называется p-ой группой A-конечных ∇-гомологий и обозначается через $H^p_{A\text{-кон}}(\mathscr{C}, J)$.

Эквивариантные группы ∇-гомологий, как было уже сказано, являются частным случаем групп типа Ψ. Оказывается, что к этому частному случаю сводится общий случай. Именно, имеет место изоморфизм $H^p_\Psi(\mathscr{C}, J) \approx H^p(\mathscr{C}, \Psi)$. (Замечание референта: эта теорема позволяет, например, выразить двумерную гомотопическую группу трехмерного многообразия через его фундаментальную группу как группу конечных ∇-гомологий фундаментальной группы).

R-комплекс $\mathscr{C}$ называется свободным, если все R-модули C_p свободны над R, и ациклическим в размерности $p \geqslant 0$, если группа $H_p = Z_p / \partial C_{p+1}$, где Z_p есть ядро гомоморфизма ∂ в группе C_p, тривиальна. Известно, что если $\mathscr{C}$ ацикличен во всех размерностях меньших N, то группы $H^p(\mathscr{C}, J)$ для $p < N$ определяются кольцом R и группами C_{-1}, J. Обратно, для любых R и C_{-1} можно построить свободный R-комплекс, ацикличный во всех размерностях. Его группы эквивариантных ∇-гомологий называются группами гомологий R и C_{-1}. В частности, если $R = R_A$, а C_{-1} — группа целых чисел, в которой A действует тривиально, то этим путем получаются группы гомологий $H^p(A, J)$ группы A.

Так как для ациклического комплекса $\check{H}_p = 0$, то $H^p(A, \Phi(R_A, J)) = 0$, где $p > 0$, а J — произвольная абелева группа. Таким образом, любой R_A-модуль J можно расширить до такого R_A-модуля J', что $H^p(A, J') = 0$ для всех $p > 0$. Пусть B — подгруппа группы A. Тогда оказывается, что для любого R_B-модуля J имеет место изоморфизм $H^p(B, J) \approx \approx H^p(A, \Psi)$, где Ψ — подмодуль модуля $\Phi(R_A, J)$, состоящий из таких функций ψ, что $\psi(ba) = b\psi(a)$, $a \in A$, $b \in B$.

Пусть $\mathscr{C}$ — свободный R_A-комплекс. Операции из группы A устанавливают в $\mathscr{C}$ отношение эквивалентности, сохраняющее гомоморфизм ∂, поэтому классы эквивалентности образуют новый комплекс $\mathscr{C} / A$. Оказывается, что если A действует в группе J тривиально, то $H\check{}^p(\mathscr{C} / A, J) \approx H^p(\mathscr{C}, J)$.

Пусть S — произвольное линейно связное, локально односвязное топологическое пространство, $\mathscr{C}(S)$ — его сингулярный комплекс, а T — его универсальное накрывающее пространство. Фундаментальная группа $A = \pi^1(S)$ определенным образом действует в пространстве T, так что сингулярный комплекс $\mathscr{C}(T)$ оказывается R_A-комплексом, причем комплекс $\mathscr{C}(T) / A$ изоморфен комплексу $\mathscr{C}(S)$. Таким образом, для любой абелевой группы J, в которой A действует тривиально, имеет место изоморфизм $H^p(\mathscr{C}(T), J) \approx H^p(\mathscr{C}(S), J)$. (Это верно и для любого R_A-модуля J, если под группой $\check{H}^p(\mathscr{C}(S), J)$ понимать группу гомологий с локальными коэффициентами.) Любая подгруппа B группы A определяет накрывающее пространство $\bar{S}$, для которого $\pi^1(\bar{S}) = B$. Оказывается, что $H^p(\mathscr{C}(\bar{S}), J) \approx H^p(\mathscr{C}(S)\Psi)$,

де Ψ — подмодуль модуля $\Phi(R_A, J)$, состоящий из таких функций ψ, что $\psi(ba) = b\psi(a)$, $a \in A$, $b \in B$. Если S является полиэдром, то всюду вместо $C(S)$ можно взять комплекс некоторой его триангуляции.

Далее автор изучает конечнолистные накрытия, определяя между их группами гомологий новый гемоморфизм «подъема» (transfer), обобщающий введенный им ранее; в частности, получается, что при переходе к конечнолистному накрытию числа Бетти не убывают. В заключение рассматривается связь группы $H^1(A, R_A)$ с дифференцированиями в смысле Фокса (РЖМат, 1953, реф. 133), введенными им в связи с теорией узлов, и с концевыми точками групп в смысле Фрейденталя — Хопфа.

М. М. Постников

624. Некоторые понятия, относящиеся к локальным строениям. Дедеккер (Quelques notions relatives aux structures locales. Dedecker Paul), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 8, 771—774 (франц.)

Пусть E — некоторое множество. При помощи а) составления множества $\mathfrak{B}(F)$ всех подмножеств какого-либо из уже имевшихся множеств F и б) образования прямого произведения $F \times F'$ уже имевшихся множеств F и F' можно получать, исходя из E, все новые и новые множества. Их совокупность называется шкалой множеств, построенной над базой E. Если F — некоторое из множеств шкалы и (S) — некоторая совокупность свойств, то обозначим через $\mathfrak{S}$ множество таких элементов $s \in F$, которые удовлетворяют всем свойствам (S), и будем говорить, что каждый элемент $s \in \mathfrak{S}$ вводит в базисном множестве E строение типа (S) (термин «структура», принятый во французской литературе, заменен референтом на «строение», так как общепринятым является сейчас алгебраический смысл термина «структура»). Свойства (S) называются аксиомами строений $s \in \mathfrak{S}$. Если, например, множество E упорядочено, то обозначим через s такое подмножество произведения $E \times E$, что $(x, y) \in s$, если $x \leqslant y$. Тогда $s \in \mathfrak{B}(E \times E)$ есть строение в E. Обычные аксиомы упорядочивания являются аксиомами этого строения. Другое введение порядка в E определяет в E другое строение того же типа (типа упорядочивания). Типами строения являются также частичное упорядочивание, введение топологии, введение групповой операции и т. д. Если φ — взаимно однозначное отображение множества E на множество E_1, то оно естественно определяет взаимно однозначные соответствия между множествами шкалы, построенной над E, и соответствующими множествами шкалы над E_1. Тем самым отображение φ переносит каждое строение, заданное в E, в некоторое строение множества E_1. Если s и s_1 — строения, заданные соответственно в множествах E и E_1, а φ — такое взаимно однозначное отображение множества E на E_1, которое переводит строение s в s_1, то говорят также, что φ есть изоморфизм строений s и s_1.

Реферируемая работа относится к понятию локального строения. Строения некоторого типа (S) называются локальными, если для них определен закон индукции. Это означает, что каждому строению s типа (S), заданному в E, соответствуют некоторая топология множества E и множество $\omega(s)$ открытых в этой топологии множеств, причем в каждом множестве $U \in \omega(s)$ однозначно определяется (индуцируется) строение s_U того же типа (S). Требуется, чтобы закон индукции был транзитивным и обладал следующим свойством: если $M = \bigcup M_i$, причем в каждом M_i определено такое строение s_i типа (S), что s_i и s_j индуцируют в $M_i \cap M_j$ одно и то же строение типа (S), то в M существует строение типа (S), индуцирующее на M_i строение s_i.

Автор вводит ряд новых понятий, связанных с локальными строениями. Из них отметим следующие. Пусть $M \subset E$, причем в множествах M и E заданы соответственно строения t и s типов (T) и (S). Пусть, кроме того, определено некоторое условие совместимости строения t с s, удовлетворяющее следующим условиям: 1) топология множества $U \in \omega(t)$, индуцированная строением t, слабее топологии этого множества относительно строения s, 2) совместимость сохраняется при изоморфизме, 3) для совместимости необходимо, чтобы при $U \in \omega(t)$, $A \in \omega(s)$, $A \supset U$ строение t_U было совместимо с s_A, и достаточно, чтобы существовало такое покрытие множества M множествами $U \in \omega(t)$, каждому из которых соответствует такое $A \in \omega(s)$, $A \supset U$, что t_U совместимо с s_A. Если в множествах E и F рассматриваются локальные строения t и s типов (T) и (S), то отображение ψ множества E в F называется $(T - S)$-отображением, если всякая точка $x \in E$ обладает окрестностью $V \in \omega(t)$, которая взаимно однозначно отображается на множество $U \subset F$, причем строение t_U, в которое переходит t_V при отображении ψ, совместимо с s.

Пусть, наконец, в множестве E введено локальное строение s и $x \in E$. Обозначим через E_x множество всех таких пар (M, t), что $M \subset E$, а t — строение в M, совместимое с s. Два элемента (M, t) и (M', t') из E_x назовем эквивалентными, если существует окрестность $U \in \omega(t) \cap \omega(t')$ точки x, $U \subset M \cap M'$, в которой t и t' индуцируют одно и то же строение. Пусть $\mathcal{E}_x$ — множество получающихся классов эквивалентности, $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in E} \mathcal{E}_x$, а p — такое отображение множества $\mathcal{E}$ в E, что $p(\mathcal{E}_x) = x$.

Автор дает эскиз доказательства следующей теоремы:

В множестве $\mathcal{E}$ существует такое локальное строение τ типа (T), что p является $(T - S)$-отображением, причем всякому $(T - S)$-отображению ψ множества F в E соответствует такой локальный изоморфизм φ множества F в $\mathcal{E}$, что $\psi = p\varphi$.

В. Г. Болтянский

625. Свободнодеформируемые континуумы. Кертис (Deformation-free continua. Curtis M. L., Ann. Math., 1953, 57, № 2, 231—247 (англ.

Исследуется взаимосвязь между свободной деформируемостью континуумов, лежащих в обобщенных многообразиях и ограничивающих области этих многообразий, и локальной связностью (гомологической и гомотопической) как самих этих континуумов, так и ограниченных ими замкнутых областей.

Континуум M, разбивающий n-мерное обобщенное многообразие S, называется свободно-деформируемым в область A, являющуюся одной из компонент множества $S \setminus M$, если существует деформация $h(x,t)$ множества M в множество $\overline{A}$, которая для всех $t > 0$ протекает в самом A. Континуум M называют свободно-деформируемым в сильном смысле, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует топологическое отображение континуума M в $S \setminus M$, смещающее каждую точку множества M меньше чем на ε.

Среди многочисленных теорем, содержащихся в работе, отметим следующие:

Теорема 1.1. Пусть S — ориентируемое n-мерное обобщенное многообразие, гомотопически локально связное в размерности $n-1$, причем число Бетти $p^1S=0$. Если M разбивает S и свободно деформируемо в A, то, кроме A, имеется лишь одна дополнительная область B, причем M есть $(n-1)$-мерное обобщенное многообразие, являющееся совместной границей A и B, и обе области A и B гомологически равномерно локально связны в размерности $n-1$.

Теорема 1.2. Если континуум M разбивает сферу S^n и свободно деформируем в область A, то $\bar{B}=S^n\setminus A$ гомологически равномерно локально связно в размерности $n-1$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — гомологически локально связны в той же размерности (по целым коэффициентам).

Теорема 4.5. Если M — гомотопически локально связный в разномерности n континуум, разбивающий сферу S^n и свободно деформируемый в сильном смысле в область A, то $\bar{A}$ равномерно локально связно (в размерности $n-1$) в гомотопическом смысле.

Теорема 2.1. Если континуум M, разбивающий сферу S^n, свободно деформируем в области A, то $\bar{A}$ есть окрестностный ретракт.

Даются условия для равномерной гомотопической локальной связности областей, исследуется гомологически регулярная сходимость компактов, определяется и исследуется гомотопически регулярная сходимость и т. п. *П. С. Александров*

626. Условия бикомпактности и равномерные структуры. Дикинсон (Compactness conditions and uniform structures. Dickinson Alice), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 224—228 (англ.)

Равномерная структура данного множества S определяется обычно как удовлетворяющая некоторым естественным условиям система подмножеств «квадрата» $S\times S$ множества S. Поэтому множество Σ_R всех равномерных структур, совместимых с топологией данного топологического пространства R, оказывается частично упорядоченным. А. Вейль показал, что для любого пространства R в Σ_R существует наибольший элемент, который он назвал универсальной равномерной структурой. Наименьший элемент множества Σ_R (если он существует) автор называет грубой (crude) равномерной структурой.

В работе доказывается:

1) Локально бикомпактные и только локально бикомпактные пространства обладают грубой равномерной структурой; эта структура, естественно, порождается бикомпактным расширением $R^*=R\cup\xi$ данного пространства R в смысле П. С. Александрова.

2) Если пространство имеет единственную равномерную структуру, то оно имеет единственное бикомпактное расширение; это расширение получается прибавлением к R одной точки.

3) Если пространство имеет единственную равномерную структуру, то оно компактно.

4) Паракомпактное пространство является полным относительно своей универсальной равномерной структуры.

5) Если паракомпактное пространство паракомпактно во всех своих равномерных структурах, то оно бикомпактно.

Утверждение 1) было доказано ранее Самюэлом (Samuel P., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 100—132). *Ю. М. Смирнов*

627 К. Топология косых произведений. Стинрод Н., 275 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 13 р. 95 к.

В книге освещена одна из областей топологии, которая в настоящее время усиленно разрабатывается и по которой имеется литература, уже трудно обозримая из-за своей обширности.

Книга состоит из трех глав. В первой, рассчитанной на читателя с элементарной топологической подготовкой, приводится общая теория косых произведений. Даются основные определения и устанавливаются связи с топологией дифференцируемых многообразий, теорией групп Ли и т. д. Вторая глава «Гомотопическая теория косых произведений» начинается с гомотопических групп и гомотопической последовательности косого произведения. Излагается общая классификационная теорема, устанавливающая связь введенных понятий с гомотопическими классами отображений в широких предположениях. Исследуются расслоения сфер на сферы, гомотопические группы сфер и ортогональных групп, характеристические отображения, пучки сфер над сферами и другие основные вопросы современной гомотопической топологии. В третьей главе «Гомологическая теория косых произведений» показывается взаимодействие гомологических и гомотопических понятий. Прежде всего вводятся гомологические группы с локальными коэффициентами (называемые там «∇-группами, основанными на пучках коэффициентов»). Изучаются препятствия, различающие цепи, характеристические классы, доказываются теоремы о распространении отображений. Таким образом, в этой книге впервые систематически изложена современная гомотопическая топология. *П. С. Александров*

628 РЕЦ. Элементы топологии плоских точечных множеств. Ньюман (Elements of the topology of plane sets of points. Newman M. H. A., pp. VIII+214, Cambridge, University Press, 1951, 27s. 6d.) [**Рецензия: Смитис** (Smithies F.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 153—154 (англ.)]

629 Д. Структурный метод в теории топологических пространств. Арешкин Г. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Матем. ин-т им. Стеклова, М., 1953

630 Д. Вопросы классификации трехмерных многообразий. Подшевкин Ю. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Киевский гос. пед. ин-т, Киев, 1953

См. также 532, 602, 607, 608, 634, 636, 687, 856 **РЕЦ**, 910

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

631. Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств. Келдыш Л. В., Новиков П. С., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2 (54), 92—104

После краткой характеристики долузинского («зачаточного») состояния дескриптивной теории множеств дается обзор деятельности Н. Н. Лузина в этой области.

Усилия Н. Н. Лузина были направлены на решение центральных, назревших проблем дескриптивной теории множеств в соответствии со сформулированной им основной задачей: «Цель дескриптивной теории множеств — решить вопрос высшей важности: можно или нет рассматривать линейный континуум атомистически, как множество точек?» Его собственные результаты, важнейшие из которых указаны в статье, отличались большой идейной направленностью. Поставленные им проблемы являлись, как правило, узловыми. Часть этих проблем была решена его учениками; их решение имело фундаментальное значение для развития дескриптивной теории множеств. Другая часть, состоящая в основном из проблем, группирующихся вокруг проблемы мощности CA-множеств, не поддалась решению (даже до настоящего времени). Возникшие при этом принципиальные трудности привели Н. Н. Лузина к исследованию границ применимости принципов теории множеств. В связи с этим им были открыты проективные множества, при изучении которых также возникли принципиальные трудности. Н. Н. Лузин выдвинул гипотезу (впоследствии частично подтвержденную работами П. С. Новикова) о невозможности решения проблемы мощности для CA-множеств и проблемы измеримости для проективных множеств в рамках классической теории множеств. Он пришел к выводу о необходимости пересмотра традиционного понимания термина «решение проблемы». Н. Н. Лузин ввел и изучил понятие резольвенты математической проблемы, тесно связанное с теорией проективных множеств. Основным направлением работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств было изучение эффективных множеств (B-множеств, A-множеств, проективных множеств). В то же время он неоднократно возвращался к вопросу об изучении фактов, которые можно получить с применением аксиомы Цермело и даже континуум-гипотезы, рассматривая такой метод как «эмпирический». Хотя Н. Н. Лузин сам и не работал в области оснований математики, он живо интересовался ею и, не будучи, правда, свободен от ошибок, достаточно критически относился и к интуиционизму Броуэра, и к формализму Гильберта.

В статье показана роль Н.Н. Лузина как одного из основоположников дескриптивной теории множеств и как создателя большой и очень сильной школы советских математиков. *В. А. Успенский*

632. О классификации R-множеств. Ляпунов А. А., Мат. сб., 1953, 32 (74) : 2, 255—262

В работе автор рассматривает вопросы теории R-множеств, используя обозначения, результаты и конструкции другой своей работы (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1953, 40). Рассматривается и решается отрицательно вопрос о возможности установления для R-множеств аналога известной теоремы М. Я. Суслина (два взаимно дополнительных A-множества являются B-множествами). Этот вывод непосредственно вытекает из основной теоремы II: для всякого $\alpha<\Omega$ в классе $BR_{\alpha+1}$ существует множество, универсальное для всех линейных множеств класса $\mathfrak{B}R_\alpha$ и только для них.

Для доказательства используется метод сравнения индексов, а также имеющая самостоятельный интерес теорема I: класс $\mathfrak{B}R_\alpha$-множеств совпадает с классом множеств, получаемых из открытых множеств $R^{\alpha+1}$-операциями с ограниченными индексами.

Указывается (теорема III) без детального проведения доказательства, что аналогичные факты имеют место и для классов некоторой подклассификации R-множеств. *Л. В. Канторович*

633. Матрицы упорядочения любых мощностей. Данжуа (Les matrices d'ordination de toutes puissances. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 4, 345—348 (франц.)

Элемент a упорядоченного множества F мощности $\geqslant\tilde{\omega}$ есть предел множества $E\subset F$ со стороны, предшествующей a (последующей за a), мощности $\tilde{\omega}$, если между любым предшествующим a (следующим за a) множеством $e\subset F$ мощности $\tilde{\omega}'<\tilde{\omega}$ и a содержится по крайней мере один элемент из F. При помощи теоремы Цермело для каждого элемента $a\in E$ определяется наименьшая мощность $\tilde{\omega}$, для которой a есть предел E со стороны, предшествующей a (последующей за a), мощности $\tilde{\omega}$.

Матрицей упорядочений мощности $\tilde{\omega}$ называется любое упорядоченное множество η мощности $\tilde{\omega}$, удовлетворяющее условию (ε): для любых двух множеств e и $e'\subset\eta$ мощности, меньшей $\tilde{\omega}$ (причем e полностью предшествует e'), η содержит элемент, предшествующий e, элемент, промежуточный между e и e', и элемент, следующий за e'. Доказывается, что: 1) два множества η, η', удовлетворяющие условию (ε), подобны; 2) если η удовлетворяет условию (ε) и мощность $\eta'\leqslant\tilde{\omega}$, то η содержит множество H, подобное η'

Матрица упорядочений для счетной мощности — множество рациональных чисел. При помощи общей континуум-гипотезы автор строит матрицу упорядочений произвольной мощности $\tilde{\omega}$.

Порядковое замыкание G матрицы упорядочений η мощности $\tilde{\omega}$ обладает свойствами: 1) каждая точка $G\setminus\eta$ есть предел множества η мощности $\tilde{\omega}$ по крайней мере с одной стороны; 2) мощность G есть $2\tilde{\omega}$. *И. А. Вайнштейн*

634. Упорядочение множеств. Данжуа (L'ordination des ensembles. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 14, 1393—1396 (франц.)

Доказываются два утверждения:

1. Пусть на интервале (0,1) задано счетное семейство счетных всюду плотных множеств E_k. Множество функций $f(x)$, непрерывных, возрастающих на [0,1] и оставляющих инвариантными каждое E_k, имеет мощность континуума.

2. Пусть $x(X)$ — функция, определенная на множестве порядковых чисел второго класса со значе-

ниями из множества порядковых чисел первого и второго классов, подчиненная условию $x(X) < X$. Не может быть, чтобы $x(X) \to \Omega$ при $X \to \Omega$.

Прим. референта. Эта теорема в другой формулировке (имеющейся и у Данжуа) доказана в работе П. С. Александрова и П. С. Урысона «О компактных топологических пространствах» (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1950, 31, 93).

В. А. Успенский

635. **Об определении функций. Тилман** (On the definition of functions. Thielman H. P.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 4, 259—262 (англ.)

Излагается один способ введения понятия функции, уже известный в литературе (см. напр., Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, Москва, 1937).

Г. Ц. Тумаркин

636. **Об объеме топологического куба. Тейлор** (On the volume of a topological cube. Taylor S. J.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 214—220 (англ.)

Топологическим кубом автор называет множество трехмерного пространства, гомеоморфное обычному кубу. Для топологического куба определяются три его размерности, обобщающие понятие длины, ширины и высоты прямоугольного параллелепипеда. Доказывается, что мера Лебега топологического куба Q не меньше, чем произведение abc, где a, b и c — три размерности куба Q.

Л. Д. Кудрявцев

637. **К теории функций двух переменных. Шмидов Ф. И.**, Докл. АН СССР, 1953, 89, № 6, 981—982

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на множестве E. Пусть $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ — точка графика этой функции. Скажем, что луч ξ с началом в точке M есть обобщенная полукасательная к графику функции $f(x, y)$, если для любого полуконуса с вершиной в M и осью ξ множество точек $(x, y) \in E$, для которых соответствующие им точки графика попадают внутрь полуконуса, имеет в точке (x_0, y_0) положительную верхнюю плотность. Формулируются две теоремы:

1. Для измеримой на множестве E функции $f(x, y)$ почти в каждой точке $(x, y) \in E$ либо $f(x, y)$ имеет асимптотический полный дифференциал, либо каждый луч ξ, исходящий из точки $(x, y, f(x, y))$, является обобщенной полукасательной к графику.

2. Множество тех точек, где измеримая функция $f(x, y)$ имеет асимптотический полный дифференциал, разлагается в сумму не более чем счетного числа множеств, на каждом из которых $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица.

Е. М. Ландис

638. **Теоремы о минимаксах. Фань Цюй** (Minimax theorems. Fan Ky), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 1, 42—47 (англ.)

Доказываются три теоремы о справедливости равенства

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x,y), \qquad (1)$$

где X и Y — некоторые абстрактные множества, а $f(x,y)$ — числовая функция на $X \times Y$, принимающая действительные значения.

Теорема 1. Пусть X и Y — два компактных пространства Хаусдорфа. Предположим, что для каждого $y \in Y$ функция $f(x,y)$ полунепрерывна снизу на X и для каждого $x \in X$ функция $f(x,y)$ полунепрерывна сверху на Y. Тогда равенство (1) выполняется в том и только в том случае, если выполняется условие: для любых двух конечных множеств $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \in Y$ существуют точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ такие, что

$$f(x_0, y_k) \leqslant f(x_i, y_0) \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m). \qquad (2)$$

В частности, равенство (2) выполняется, если $f(x, y)$ на X выпукла, а на Y вогнута.

Теорема 2. Пусть X есть компактное пространство Хаусдорфа и Y — произвольное множество (без топологии). Пусть функция $f(x, y)$ для каждого элемента $y \in Y$ полунепрерывна снизу на X. Если $f(x,y)$ выпукла на X, а вогнута на Y, то имеет место равенство (1).

Теорема 3. Пусть $f(x, y)$ — почти периодическая функция на $X \times Y$. Тогда равенство (1) выполняется в том и только в том случае, если выполнено следующее условие: для каждого $\varepsilon > 0$ и произвольных конечных множеств $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \in Y$ существуют $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ такие, что

$$f(x_0, y_k) - f(x_i, y_0) \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m). \qquad (3)$$

В частности, равенство (3) выполняется, если $f(x, y)$ выпукла на X и вогнута на Y.

Теорема 3 аналогична теореме 1, однако вместо компактности пространств X и Y требуется почти периодичность функции $f(x, y)$.

Автор отмечает, что равенство (1) впервые изучалось Нейманом в связи с теорией игр.

Б. М. Левитан

639. **Инвариантные меры, определенные для дифференциальных уравнений. Маркус** (Invariant measures defined by differential equations. Markus L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 89—91 (англ.)

Пусть $dx/dt = f(x, y)$, $dy/dt = g(x, y)$, где f и g — функции класса $C^{(1)}$, $f^2 + g^2 > 0$; $\psi(x, y)$ — первый интеграл этой системы; $\mu(x,y) = [(\psi_x^2 + \psi_y^2)/(f^2+g^2)]^{1/2}$ — интегрирующий множитель данной системы: $\partial(\mu f)/\partial x + \partial(\mu g)/\partial y = 0$; E — измеримое в смысле Лебега множество и $\mu(E) = \iint_E \mu(x, y)\, dE$ (интеграл берется в смысле Лебега). Доказывается, что в случае аналитичности на всей плоскости указанной системы уравнений мера $\mu(E)$ эквивалентна мере Лебега (для аналитических первых интегралов $\psi(x, y)$). Рассматриваются и некоторые другие свойства меры $\mu(E)$.

Л. Д. Кудрявцев

640. **Определение интеграла Лебега. Гофман** (Definition of the Lebesgue integral. Goffman Casper), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 4, 251—252 (англ.)

Дается определение интеграла Лебега, основная идея которого не нова. Она систематически изложена для общего случая интегрирования функций многих переменных в учебнике С. Л. Соболева (Уравнения математической физики, М.—Л., 1947).

И. Е. Жак

641. **Теория мер Радона на локально компактных пространствах. Эдуардс** (A theory of

Radon measures on locally compact spaces. Edwards R. E.), Acta math., 1953, 89, № 1—2, 133—164 (англ.)

Пусть $\mathfrak{C}$ — пространство всех вещественных непрерывных функций на локально бикомпактном пространстве X, каждая из которых равна 0 вне бикомпакта. Мерами Радона автор называет непрерывные (по какой-либо норме) линейные функционалы μ на $\mathfrak{C}$, обладающие тем свойством, что $\mu(f_n)\to 0$, когда все $f_n = 0$ вне одного и того же бикомпакта, а на бикомпакте равномерно стремятся к 0. Обычный метод интегрального представления линейных функционалов состоит в том, что по заданному функционалу μ строят соответствующую функцию множества μ, определенную сначала на бикомпактах, затем ее распространяют как счетно аддитивную функцию множества на наименьшее борелевское тело множеств B, содержащее все бикомпакты, и устанавливают, что $\mu(f)=\int\limits_x f d\mu$; полученное представление дает возможность распространить функционал μ на все функции f, измеримые относительно функции множества μ. Недостатком этого метода в том случае, когда X не есть объединение счетного множества бикомпактов, является то, что B оказывается неполным относительно операции дополнения, содержит не все открытые множества и т. п. Автор избирает обратный путь: сначала распространяет функционал μ на широкий класс функций f, обладающих основными свойствами суммируемых по Лебегу функций на вещественной прямой, а затем определяет соответствующую функцию множества μ сразу для всех измеримых множеств; при этом множество E называется измеримым (относительно μ), если для каждого бикомпакта $K\subset X$ суммируема характеристическая функция $\chi_{E\cap K}$ его пересечения с E; по определению $\mu(E)=\sup\limits_K \int \chi_{E\cap K}\, d\mu$. Совокупность измеримых множеств оказывается телом, содержащим все открытые (и даже все аналитические) множества. Устанавливается регулярность построенной функции множества μ для широких классов (однако не для всех) измеримых множеств, доказывается теорема Фубини и т. п. Полученные результаты новы только тогда, когда X не есть объединение счетного множества бикомпактов.

Д. А. Райков

642. Почти периодические функции на локально компактных группах. Страбл (Almost periodic functions on locally compact groups. Struble Raimond A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 2, 122—126 (англ.)

На локально компактной группе G с левоинвариантной мерой μ неймановское среднее почти периодической функции f равно интегральному среднему

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu(U_t)}\int\limits_{U_t} f(x)\, d\mu(x),$$

если $\{U_t\}$ $(0<t<+\infty)$ — семейство открытых множеств с компактным замыканием, удовлетворяющее следующим требованиям (здесь Δ означает симметрическую разность множеств, именно, $A\,\Delta\, B=(A-B)\cup(B-A)$): а) для каждого $\varepsilon>0$ и $y\in G$ существует $a>0$ такое, что $\mu(yU_t\,\Delta\, U_t)<\varepsilon\mu(U_t)$ для всех $t\geqslant a$; б) для каждого $c>0$ и $\varepsilon>0$ существует $b>0$ такое, что, каково бы ни было $t\geqslant b$, найдется конечный набор элементов $x_1,\ldots,x_n\in G$, удовлетворяющий условиям $x_iU_c\cap x_jU_c=0$ $(i\neq j)$ и $\mu(U_t\,\Delta\bigcup\limits_i x_iU_c)<\varepsilon\mu(U_t)$. Вопрос о существовании семейства $\{U_t\}$, удовлетворяющего этим требованиям (последнее из которых представляется довольно стеснительным), не рассматривается.

Автор называет ε-смещением комплексной функции f на G элемент w такой, что $|f(xy)-f(xwy)|<\varepsilon$ для всех $x, y\in G$, а функцию f — почти периодической по Бору, если для каждого $\varepsilon>0$ существует компакт $C\subset G$ такой, что zC содержит ε-смещение этой функции при всяком $z\in G$. Для непрерывных функций на локально компактной группе понятия почти периодичности по Бору и по Нейману оказываются равносильными.

Д. А. Райков

643. Два примера из теории функций действительного переменного. Виланский (Two examples in real variables. Wilansky Albert), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 5, 317 (англ.)

644. Об интеграле Стилтьеса 2-го порядка. Дун Хуай-юнь (On Stieltjes integral of order 2. Tung Huai-yuen), Sci. Record, 5, № 1—4, 29—43 (англ.)

Изучаются условия существования интеграла, являющегося пределом сумм

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\left[\frac{g(x_{k+1})-g(x_k)}{x_{k+1}-x_k}-\frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right],$$

и основные свойства этого интеграла. Содержание работы почти полностью охватывается работами Хана (Hahn H., Sitzungsber. Ak. Wien, 1925, 134, 449—470) и Л. В. Канторовича (Докл. АН СССР, 1934, 4, № 8—9, 417—421), которые, повидимому, остались неизвестными автору. (См. еще работу Минь Сы-хе, Sci. Record, 1951, 4, № 2, 109—118.)

И. П. Натансон

645. К вопросу о распространении функций. Бабич В. М., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2 (54), 111—113

Хестенес (Hestenes M. R., Duke Math. J., 1941, 8, 183—192, теоремы 1 и 2) доказал, что функция $\varphi(x_1, x_2,\ldots,x_n)\in C^{(l)}$ в области Ω, ограниченной кусочно-гладким контуром класса $C^{(l)}$, может быть распространена на все пространство с сохранением класса (см. также Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, М.—Л., 1951, I, 674—687).

Автор устанавливает аналогичное утверждение для обобщенных производных: если функция $\varphi(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in W_p^{(l)}$ в области Ω, ограниченной кусочно-гладким контуром класса $C^{(l)}$, то ее можно распространить на все пространство так, что она будет принадлежать классу $W_p^{(l)}$ во всякой конечной области.

Под обобщенной производной

$$\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\qquad(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=l)$$

функции $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в области Ω, следуя С. Л. Соболеву (Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950, § 5), подразумевается суммируемая в Ω функция $\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega}\left[\varphi\frac{\partial^l\psi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+(-1)^{n+1}\psi\omega_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}\right]d\Omega=0,$$

какова бы ни была функция ψ класса $C^{(l)}$, тождественно равная нулю вне некоторого шара, принадлежащего к Ω. Класс $W_p^{(l)}$ есть многообразие всех суммируемых в Ω функций φ, имеющих все обобщенные производные порядка l, суммируемые в Ω со степенью $p>1$.

Автор отмечает, что уже после сдачи в печать данной статьи ему стало известно о получении этого же результата С. М. Никольским. Он сформулирован в виде леммы без доказательства в статье С. М. Никольского (см. РЖМат, 1953, реф. 266).

Г. М. Фихтенгольц

646. О функциях В. А. Стеклова. Харшиладзе Ф. И., Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, **14**, № 3, 139—144

Пусть $f(x)$ периода 2π суммируемая на периоде функция и пусть

$$f_\delta(x)=(2\delta)^{-1}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)\,dt$$

ее функция Стеклова.

Для того чтобы (после видоизменения $f(x)$ на множестве меры нуль) имело место равенство

$$\sup_x|f_\delta(x)-f(x)|=O(\delta^\beta)\quad(0<\beta\leqslant 2),\qquad(1)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ при $0<\beta<1$ удовлетворяла условию Липшица степени β, при $\beta=1$ удовлетворяла условию Зигмунда

$$\sup_x|f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)|=O(\delta)$$

и при $1<\beta<2$ обладала производной, удовлетворяющей условию Липшица степени $\beta-1$.

Из равенства

$$\sup_x|f_\delta(x)-f(x)|=o(\delta^2)$$

следует, что $f(x)=\text{const}$. Если $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица степени единица, то (1) имеет место при $\beta=1$. Автор отмечает, что вопрос о том, справедливо ли обратное утверждение, остается открытым.

Сформулирована аналогичная теорема в метрике $L_p(0,2\pi)$ при $p\geqslant 1$. Отметим, что сформулированные выше достаточные условия для выполнения (1) при $\beta\leqslant 1$ в более общем многомерном случае недавно получены А. А. Дезиным (РЖМат, 1953, реф. 151). Дезиным рассматривались функции, обращающиеся в нуль вне некоторой конечной области n-мерного пространства, такие, что их гладкость на границе области не нарушается. Эти функции можно без труда продолжить периодическим образом.

С. М. Никольский

647. Функции, нечетные относительно нескольких точек. Боас (Functions which are odd about several points. Boas R. P., Jr), Nieuw arch. wiskunde, 1953, **1**, № 1, 27—32 (англ.)

Рассматриваются периодические функции, удовлетворяющие условию

$$f(x+t)-2f(x)+f(x-t)=0,\qquad(1)$$

по крайней мере при двух значениях x почти для всех t. Устанавливается, что если $f(t)$ измерима и удовлетворяет (1) либо для двух значений x, разность которых иррациональна, либо для бесконечного множества произвольных значений x, то она эквивалентна постоянной. Требование измеримости $f(t)$ существенно в том смысле, что существуют ограниченные функции, не эквивалентные постоянной и удовлетворяющие (1) даже для бесконечного счетного множества рационально независимых x. Это требование можно снять, если $f(t)$ ограничена и условие (1) выполняется для значений x, составляющих множество положительной меры.

Изучаются также периодические функции, удовлетворяющие почти для всех t более общему, чем (1), условию

$$f(x+t)-2f(x)+f(x-t)=h_x(t),\qquad(2)$$

в котором $h_x(t)$ аналитична в некоторой полосе, содержащей вещественную ось и имеющей ширину, не зависящую от x.

Доказывается, что если $f(t)$ интегрируема и удовлетворяет (2) для значений x, составляющих множество положительной меры, то она аналитична.

Ставится вопрос о существовании ограниченных функций, не эквивалентных постоянной и удовлетворяющих (1) для несчетного множества значений x.

А. Ф. Тиман

648. Два признака компактности семейств функций. Медведев Ю. Т., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 3, 337—340

Пусть $f(x)$ — однозначная функция, определенная на абстрактном множестве X, значения которой суть элементы компакта M с метрикой r. Пусть $M[X]$ — метрическое пространство, образованное всевозможными функциями, где метрика определяется формулой

$$\rho(f_1,f_2)=\sup_{x\in X}r[f_1(x),f_2(x)].$$

Аналогично вводится в рассмотрение метрическое пространство $M[Y]$, состоящее из однозначных отображений абстрактного множества Y в M.

Теорема I. Пусть $\varphi(x,y)$ — функция, значения которой принадлежат M, определенная при $x\in X, y\in Y$. Тогда, фиксируя сначала y, а затем x, получим семейства $F\in M[X]$, $G\in M[Y]$, которые одновременно компактны или некомпактны.

Другая теорема относится к вещественным функциям, определенным на измеримом множестве конечной меры евклидова пространства.

Теорема II. Для того чтобы семейство измеримых почти везде конечных функций $f(x)$ было компактно в смысле сходимости по мере, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$ каждой функции $f(x)$ соответствовала такая непрерывная функция $f_\varepsilon(x)$, что 1) $\operatorname{mes}E(f\neq f_\varepsilon)<\varepsilon$; 2) семейство функций f_ε компактно в смысле равномерной сходимости.

Из теоремы I выведена как следствие теорема Арцела для абстрактных пространств. Относительно теоремы II делается замечание, что ее условия необходимы и достаточны также и для компактности в смысле сходимости почти всюду.

В. М. Дубровский

649. **Новое обоснование теории «распределений» Шварца.** К ё н и г (Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. Schwartz. K ö n i g H e i n z), Math. Nachr., 1953, 9, № 3, 129—148 (нем.)

Пусть Ω — произвольное открытое множество в евклидовом пространстве E_n с координатами x_1, x_2 ,...,x_n. Рассматривается совокупность $\mathfrak{V}$ формальных степенных рядов

$$\tau = \sum \underline{f}_{s_1, \ldots, s_n} z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n} \quad (s_i = 0, 1, \ldots) \qquad (*)$$

с коэффициентами, являющимися классами почти всюду на Ω равных между собой функций, таких, что для каждой точки Ω существует окрестность, в которой отлично от нуля лишь конечное число коэффициентов $\underline{f}_{s_1,\ldots,s_n}$. Частная производная по x_i ряда (*) определяется равенством

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = \sum \underline{f}_{s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n} z_1^{s_1} \cdots z_{i-1}^{s_{i-1}} z_i^{s_i+1} z_{i+1}^{s_{i+1}} \cdots z_n^{s_n}.$$

Последовательность $\tau^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, элементов $\mathfrak{V}$ называется сходящейся к τ, если для любого $(s_1,\ldots s_n)$ последовательность $\underline{f}^{(k)}_{s_1, \ldots, s_n}$ сходится к $\underline{f}_{s_1,\ldots,s_n}$ и, кроме того, выполняются еще некоторые условия общего характера. Совокупность $\mathfrak{V}$ является абелевой группой по сложению; дифференцирование и предельный переход в $\mathfrak{V}$ обладают рядом простых свойств (в частности, каждый элемент $\mathfrak{V}$ любое число раз дифференцируем по любому x_i и дифференцирование всегда переставимо с предельным переходом).

Пусть теперь $\mathfrak{N}$ — подгруппа $\mathfrak{V}$, состоящая из рядов (*), представляемых в окрестности любой точки Ω в виде конечной суммы элементов $\varepsilon = (\underline{g} - \underline{f}z_i) z_1^{s_1} \ldots z_n^{s_n}$, где класс функций $\underline{g}$ содержит функции g, интегрируемые по любому компактному подмножеству Ω, а класс $\underline{f}$ содержит функцию, равную неопределенному интегралу Лебега от g по x_i. Доказывается, что вместе с каждым элементом в $\mathfrak{N}$ содержатся также и все его частные производные и что предел сходящейся последовательности элементов $\mathfrak{N}$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Отсюда вытекает, что определения дифференцирования и предельного перехода в $\mathfrak{V}$ могут быть перенесены также на факторгруппу $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{V}$ по $\mathfrak{N}$, причем эти операции в $\mathfrak{F}$ будут обладать теми же простыми свойствами, что и в $\mathfrak{V}$. Далее доказывается, что можно установить взаимнооднозначное соответствие между совокупностью Ω интегрируемых классов смежности из $\mathfrak{F}$ (т. е. классов смежности из $\mathfrak{F}$, содержащих ряды (*) с интегрируемыми в окрестности любой точки Ω коэффициентами) и совокупностью (D') «распределений» Шварца (Schwartz L.), Theorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951) и что это соответствие будет изоморфизмом относительно сложения, дифференцирования и перехода к пределу; «распределениям», сводящимся к функциям $\underline{f}$, при этом отвечают элементы Ω, содержащие ряд $\underline{f}$ из одного элемента нулевой степени. В заключение ряд свойств, доказанных Шварцем для «распределений», непосредственно доказывается для элементов Ω.

А. М. Яглом

650. **О свойствах непрерывности производных от членов функциональной последовательности.** У о л ш (On continuity properties of derivatives of sequences of functions. W a l s h J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 69—75 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. Пусть функции $f_n(x)$ стремятся к $f(x)$ в каждой точке отрезка I; пусть все $f_n(x)$ и $f(x)$ имеют всюду на I производные порядка $p (p > 0)$. Тогда для любой точки x_0 из I и для любых положительных δ и ε существует такое N, что для всякого $n > N$ найдется точка x_n, для которой

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad |f_n^{(p)}(x_n) - f_n^{(p)}(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда выводится несколько простых следствий.

Т е о р е м а 2. Пусть все $f_n^{(p)}(x)$ непрерывны и имеют одинаковый модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на отрезке I. Если последовательность $f_n(x)$ сходится в каждой точке из I, то предельная функция $f(x)$ имеет производную $f^{(p)}(x)$ и ее модуль непрерывности снова равен $\omega(\delta)$.

Н. К. Бари

651 Д. **Об одном обобщении меры и категории.** Г л а д к и й А. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1953

652 Д. **О повторных интегралах.** П х а к а д з е Ш. С. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ин-т им. Размадзе, Тбилиси, 1953

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

653. **О неравенстве Бора.** Н а д ь (Über die Ungleichung von H. Bohr. S z.-N a g y B é l a), Math. Nachr., 1953, 9, № 4, 255—259 (нем.)

Если $f(z) = \sum_k (a_k \cos u_k x + b_k \sin u_k x)$ периодический или непериодический тригонометрический полином, у которого $u_k \geqslant U > 0$, и если

$$F(x) = \sum_k \frac{1}{u_k} (a_k \sin u_k x - b_k \cos u_k x)$$

то имеет место неравенство

$$|F(x)| \leqslant \frac{\pi}{2U} \sup |f(x)|,$$

впервые доказанное Бором (Bohr H., C. r. Acad. sci., 1935, **200**, 1276—1277).

В настоящее время известны различные доказательства неравенства Бора. Автор приводит одно такое простое доказательство, принадлежащее ему и Штраусу, которое уже было в свое время опубли-

кование на венгерском языке (Sz.-Nagy B., Strausz A., Mat. Termész. Ertes., 1938, 57, 121—133). Оно основано на представлении функции $F(x)$ в виде интеграла ($U = 1$).

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} R(t)\, f(x-t)\, dt,$$

где $R(t)$ — интегрируемая нечетная функция такая, что для $|u| \geqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t) \sin ut\, dt = \frac{1}{u}.$$

С. М. Никольский

654. **Целые функции и тригонометрические полиномы. Шеффер** (Entire functions and trigonometric polynomials. Schaeffer A. C.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 77—88 (англ.)

Дается следующее обобщение известной теоремы С. Н. Бернштейна о производной целой функции конечной степени, ограниченной на вещественной оси.

Пусть $A>0$, $\alpha>0$ и E—такое замкнутое множество вещественных чисел, что всякий интервал длины A содержит часть множества E с мерой не меньшей α.

Доказывается, что почти всюду на E можно так определить положительную функцию $q(x)$, что из неравенства $|f(x)| \leqslant M$ (при $x \in E$ для целой функции произвольной конечной степени γ) следует во всех точках определения $q(x)$ неравенство

$$|f'(x)| \leqslant M q(x)^{\gamma}.$$

Здесь существенно, что функция $q(x)$ зависит лишь от множества E. Эта теорема является обобщением и усилением следующей теоремы И. И. Привалова (Интеграл Коши, Зап. Саратовского ун-та, 1916):

Пусть H — множество интервалов из $(-\pi,\pi)$ и $|H|$ — мера H. Каждому $\varepsilon>0$ можно сопоставить подмножество H' множества H с мерой $> |H| - \varepsilon$ и такое число $B(\varepsilon)$, что всякий тригонометрический полином, ограниченный на H числом 1, удовлетворяет на H' неравенству

$$|T_n'(x)| \leqslant nB(\varepsilon).$$

Б. Я. Левин

655. **Об одном классе совершенных M-множеств. Сивин, Крестенсон** (The multiplicity of a class of perfect sets. Civin Paul, Chrestenson H. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 260—263 (англ.)

Совершенное множество P меры нуль строится следующим способом: из $[0, 2\pi] = \rho_1^0$ выбрасывается интервал d_1^1, остаются сегменты ρ_1^1 и ρ_2^1. На m-ом шаге процесса построения выбрасывается $d_i^{(m)}$ из $\rho_i^{(m-1)}$, остаются сегменты $\rho_{2i-1}^{(m)}$ и $\rho_{2i}^{(m)}$ $(i=1,2,\ldots,2^{m-1})$. Пусть

$$\varepsilon_m = \sup_i \frac{d_i^{(m)}}{\rho_i^{(m-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1});$$

$$\theta_m = \sup_i \left(\frac{\rho_{2i}^{(m)}}{\rho_{2i-1}^{(m)}}, \frac{\rho_{2i-1}^{(m)}}{\rho_{2i}^{(m)}} \right).$$

В работе Н. К. Бари (Fundam. math., 1927, **9**, 62 — 115) было доказано, что если $\varepsilon_m = o(1)$, а $\theta_m = O(1)$, то P есть M-множество (т. е. существует тригонометрический ряд с коэффициентами, отличными от нуля, и сходящийся к нулю всюду вне множества P). Ею высказана также гипотеза, что требование $\theta_m = O(1)$ является излишним. Верблунский (Verblunsky S., Acta math., 1935, **65**, 291—305) ввел лемму, на основе которой построил доказательство справедливости этой гипотезы. Авторы показывают на примере, что лемма Верблунского неверна и доказывают теорему, промежуточную между теоремой Бари и ее гипотезой: если при указанном выше построении множества P имеем $\varepsilon_m = o(1)$ и $\theta_m = o\left(\frac{1}{\eta_m}\right)$, где $\eta_m = \sup_{n \geqslant m} \varepsilon_n$, то P есть M-множество.

У авторов остается нерешенным вопрос, является ли неверной и сама теорема Верблунского или неверно только его доказательство. И. И. Шапиро-Пятецкий (Докл. АН СССР, 1952, **85**, 497 — 500) показал на примере, что и сама теорема неверна, т. е. множество P, для которого $\varepsilon_m = o(1)$, может оказаться U-множеством (множеством единственности для тригонометрических рядов). *Н. К. Бари*

656. **Линейные методы суммирования рядов Фурье. Тиман А. Ф.**, Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 2, 99—133

Пусть через $W^{(r)}H_{\omega}$ обозначен класс функций периода 2π, имеющих производную порядка r, обладающую модулем непрерывности, не превышающим данную функцию $\omega(\delta)$, которая в свою очередь есть модуль непрерывности некоторой непрерывной функции. При $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$ пусть $W^{(r)}H_{\omega}=W^{(r)}H^{(\alpha)}$. Пусть, далее, $\lambda_k^{(n)}$ $(\lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_{n+1}^{(n)} = 0; \quad k = 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots)$ заданная треугольная матрица чисел и

$$\sigma_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \lambda_k^{(n)} (b_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f. Наконец, если $\mathfrak{M}$ — множество функций, то положим

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |f(x) - \sigma_n(f, x)|;$$

положим еще

$$\mu_k = (1 - \lambda_k^{(n)}) / k^r, \quad \Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

и $\Delta^2\mu_k = \Delta\Delta\mu_k$.

Основные результаты работы сводятся к следующим двум неравенствам:

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}H_{\omega}) \geqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \omega(2t/n) \sin t\, dt \times$$

$$\times \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{n-k+1} - \frac{\ln n}{nr} \right| +$$

$$+ O\left[\frac{\omega(n^{-1})}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \right] + O\left[\frac{\omega(n^{-1})}{n^r} \right], \quad (2)$$

$$\varepsilon_n\left(W^{(r)}H^{(\alpha)}\right) \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{i}\right)\left|\Delta^2\mu_k\right| +$$

$$+ O\left(\sum_{k=0}^{[qn]}(k+1)^{1-\alpha}\left|\Delta^2\mu_k\right|\right) +$$

$$+ \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=[qn]+1}^{n-1}(n-k)\left|\Delta^2\mu_k\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (3)$$

и еще нескольким, им подобным. Здесь $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль, $0<\alpha<1$, q — фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $0<q<1$, и $|\lambda_k^{(n)}|\leqslant C$.

Первые числа в правых частях (2) и (3) делаются главными, когда $\lambda_k^{(n)}$ близки к единице, т. е. когда метод суммирования близок к сумме Фурье. Для суммы Фурье $\left(\lambda_k^{(n)}=1,\ k\leqslant n,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0\right)$ при $\omega(x)=x^\alpha$ неравенства (2), (3) переходят в асимптотическое равенство

$$\varepsilon_n\left(W^{(r)}H^{(\alpha)}\right) = \frac{2^{\alpha+1}\ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(n^{-r-\alpha}\right). \qquad (4)$$

Автор обобщает это равенство, заменяя $\ln n/n^{-r}$ некоторыми выражениями, зависящими от коэффициентов $\lambda_k^{(n)}$, при условии, что на них наложены определенные ограничения. В частности, подобное обобщение получено в случае суммы Валле-Пуссена и ее аналога (целой функции), предложенного Н. И. Ахиезером и Б. М. Левитаном. Само по себе равенство (4) получено референтом (Докл. АН СССР, 1941, **32**, № 6, 386—389).

Налагая ограничения на первый и второй члены правой части (3), автор получает условия, которым должна удовлетворять $\lambda_k^{(n)}$, чтобы данный метод суммирования давал порядок наилучшего приближения для рассматриваемого класса функций. На этом пути обобщаются результаты референта (Изв. АН СССР, сер. мат., 1948 **12**, 259—278) и Надь (Nagy B., Acta scient. math., 1950, **12**, 204—210).

В работе отмечаются примыкающие к ней исследования Надь (Acta math. Acad. sci. hung., 1948, **1**, № 3, 14—52), базирующиеся на применении интеграла Фурье; в них на $\lambda_k^{(n)}$ накладываются некоторые условия регулярности, чего не предполагает автор.

Замечания референта. 1. То обстоятельство, что в оценках автора, полученных для $0<\alpha<1$, нельзя осуществить непрерывный переход при $\alpha\to 1$, на самом деле не существенно; оно связано лишь с примененным методом. 2. В формулировке теоремы 7 под знаком суммирования $\sum_{k=0}^{n-1}$ пропущен множитель $n-k$.

С. М. Никольский

657. Суммирование рядов Фурье. Мак-Фадден (Summation of Fourier series. Mc Fadden J. A.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 3, 364 (англ.)

Рассматривается вопрос о суммировании рядов Фурье в «замкнутой форме». Дается краткое описание пяти уже известных частных приемов такого суммирования и высказываются некоторые соображения относительно удобства их применения.

И. П. Натансон

658. Явление Гиббса при суммировании обобщенных рядов Фурье методами Чезаро и Гёльдера. Уолмсли (Gibbs phenomena for Cesàro and Hölder summation of generalized Fourier series. Walmsley C.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2., № 110, 148—156 (англ.)

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$$

называется обобщенным рядом Фурье в смысле главного значения для функции $f(x)$, обращающейся в бесконечность в изолированных точках промежутка $(-\pi,\ \pi)$, если числа a_n и b_n определены формулами:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (2)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши (Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., 1925, **23**, 41).

В реферируемой статье вводятся обобщенные ряды Фурье в смысле контурного интегрирования, когда в формуле (2) интегралы берутся по контуру Γ, расположенному в комплексной плоскости, ведущему из точки $-\pi$ к точке π и избегающему особенности функции $f(x)$. Соответствующий тригонометрический ряд (1) автор называет обобщенным рядом Фурье для $f(x)$ в смысле контурного интегрирования, соответствующим контуру Γ.

Автор изучает явление Гиббса для чезаровских и гёльдеровских средних рядов Фурье указанных видов.

В случае рядов Фурье в смысле главного значения рассматривается стандартная функция $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Для нее обобщенным рядом Фурье служит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx; \qquad (3)$$

этот ряд не сходится, но является суммируемым методом $(C,\ 1)$. Показывается, что

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ x\to 0+}}}\frac{\sigma_n(x)}{f(x)} = 1{,}2172\ldots,$$

где $\sigma_n(x)$ обозначает $(C,\ 1)$ средние ряда (3). Таким образом, в окрестности точки $x=0$ имеет место явление Гиббса. В промежутке $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ написанное отношение равномерно стремится к единице.

Изучается явление Гиббса для суммирований методами $(C,\ 2)$ и $(H,\ 2)$ рядов Фурье в смысле

контурного интегрирования. В качестве стандартной функции берется

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Ф. И. Харшиладзе

659. Заметка об обращении рядов Фурье. Эдрей, Серге (A note on the reciprocal of a Fourier series. Edrei A., Szegö G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 323—329 (англ.)

Устанавливается соотношение, связывающее коэффициенты Фурье функций $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu x}$ и $[f(x)]^{-1} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_\nu e^{i\nu x}$.

Положим:

$$\Delta_{2n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-2n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-2n+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\Delta_{2n+1}(j, k)$ минор, получаемый вычеркиванием из Δ_{2n+1} $(n+1+j)$-ой строки и $(n+1+k)$-го столбца. Доказывается, что если $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \in L$, $[f(x)]^{-1} \in L$, то

$$\Delta_{2n+1} > 0 \qquad (*)$$

и, кроме того, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{j-k}\,\frac{\Delta_{2n+1}(j, k)}{\Delta_{2n+1}} = b_{k-j}.$$

Неравенство (*) известно и было ранее доказано Серге (Math. Z., 1920, **6**, 167—202). *И. Е. Жак*

660. Исправления и дополнения. Прасад, Сингх (Corrigenda and addenda. Prasad B. N., Singh U. N.), Math. Z., 1952, **57**, № 4, 481—482 (англ.)

Дополняются доказательства, содержащиеся в статье «О сильной суммируемости продифференцированного ряда Фурье и его сопряженного ряда» (Math. Z., 1952, **56**, 280—288), и указываются опечатки.

661. Суммирование по квадрату и локализация двойных тригонометрических рядов. Шапиро (Square summation and localization of double trigonometric series. Shapiro Victor L.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 347—357 (англ.)

Излагается теория локализации двойных тригонометрических рядов для случая суммирования по квадрату, при этом используется процесс формального перемножения рядов, развитый Райхманом и Зигмундом.

Двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

где c_{mn} — произвольные комплексные числа, называется (C, ρ)-суммируемым по квадрату $(\rho \geqslant 0)$ к сумме $L(x, y)$, если

$$\sigma_R(x, y) = \sum_{|M| \leqslant R} c_{mn} e^{i(mx+ny)} \left(1 - \frac{|M|}{R^2}\right)^{\rho},$$

где $|M| = \max(|m|, |n|)$, сходится к $L(x, y)$ при $R \to +\infty$. Пусть A есть замкнутое множество, содержащееся внутри фундаментального квадрата $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$, A_0 — множество внутренних точек A и A' — замкнутое множество, принадлежащее к A_0. Рассмотрим функцию $\lambda(x, y)$ класса $C^{(11)}$, удовлетворяющую условиям: $\lambda(x, y) = 0$, когда $(x, y) \in A \pmod{2\pi}$, и $\lambda(x, y) = 1$, когда $(x, y) \in A' \pmod{2\pi}$; $\alpha_{mn} = O[(|m|+1)^{-7}(|n|+1)^{-7}]$, где α_{mn} — коэффициент Фурье для $\lambda(x, y)$.

Доказывается следующее основное предложение: Если коэффициенты c_{mn} двойного тригонометрического ряда $\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}$ удовлетворяют условию

$$c_{mn} = o[(|m|+1)^{-\gamma}(|n|+1)^{-\eta}], \quad 0 \leqslant \gamma + \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \ 0 \leqslant \eta < 1,$$

то двойной ряд

$$\frac{c_{00}x^2y^2}{4} + \frac{y^2}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_{m0}(im)^{-2}e^{imx} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_{0n}(in)^{-2}e^{iny} + \sum_{m,\,n}{}'' c_{mn}(mn)^{-2}e^{i(mx+ny)}$$

равномерно сходится к некоторой функции $F(x, y)$. Кроме того, разность

$$\sum_{|M| \leqslant R} c_{mn} e^{i(mx+ny)} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(u, v)\,\lambda(u, v)\,\frac{d^2D_R(u-x)}{dx^2} \times \frac{d^2D_R(v-y)}{dy^2}\,du\,dv$$

равномерно $(C, 1-(\gamma+\eta))$-суммируема к нулю в A', где $D_R(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-[R]}^{[R]} e^{imt}$ — ядро Дирихле.

В. Г. Челидзе

662. **О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную.** Дзядык В. К., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 2, 135—162

Пусть через $H^{(s)}$ и $H^{(s)}L$ обозначены соответственно классы периодических функций f периода 2π, имеющих производную, вообще говоря, дробную (в смысле Вейля) порядка s ($s>0$), удовлетворяющую соответственно условиям $|f|\leqslant 1$ и $\int_0^{2\pi}|f|\,dt\leqslant 1$.

Пусть $E_n(f)$ и $E_n(f)_L$ — наилучшие приближения функции f при помощи тригонометрических полиномов порядка $(n-1)$, соответственно равномерное и в метрике L. Наконец, пусть

$$\psi_s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx-s\pi/2)}{k^s}$$

и $T^*_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $(n-1)$, интерполирующий $\psi_s(x)$ в точках $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ $(k=1,2,\ldots,2n-1)$.

Доказывается, что только в этих $(2n-1)$ точках и, кроме того, в точке $x=0$ разность $\psi_s(x)-T^*_{n-1}(x)$ меняет знак.

Это основной результат. Из него при помощи известных в теории приближений рассуждений (см. статью референта, Изв. АН СССР, сер. мат., 1946, **10**, 207—256) автор выводит в случае $0<s<1$ следующие факты:

$$\pi\sup_{f\in H^{(s)}}E_n(f)=\pi\sup_{f\in H^{(s)}L}E_n(f)_L=E_n(\psi_s)_L=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left|\psi_s-T^*_{n-1}\right|dt=4n^{-s}K_s\sin\frac{s\pi}{2},$$

где $K_s=\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)^{-s-1}$.

При целых $s=1,2,\ldots$ основные относящиеся к этому вопросу результаты были получены Фаваром (Favard J., C. r. Acad. sci., 1936, **202**, 273—275) и затем в разных направлениях развивались в работах Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, Б. Надь и референта. Данная работа характерна тем, что исследуемое в ней ядро $\psi_s(x)$ имеет разложение в ряд Фурье, содержащее как косинусы, так и синусы.

Отметим, что результаты этой работы показывают ошибочность гипотезы и вытекающей из нее оценки Фавара (Bull. sci. math., 1937, **61**, 209—224, 243—256), гласящей, что для каждого s существует тригонометрический полином $T^{(s)}_{n-1}(x)$ порядка $(n-1)$ такой, что разность $\psi_s-T^{(s)}_{n-1}$ меняет знак в нулях $\cos\left(nx-\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ и только в них.

Случай нецелого $s>1$ в этой проблеме остается пока нерешенным. Отметим еще, что в работе полностью с эффективной константой решается задача об асимптотическом выражении наилучшего приближения в среднем периодической функции, имеющей разрывную производную порядка s при $0<s<1$ ограниченной вариации, подобно тому, как это было сделано референтом в непериодическом случае при целом s. (Докл. АН СССР, 1947, **60**, 195—198).

С. М. Никольский

663. **О наилучшем приближении в среднем функции, s-ая производная которой имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1,1]$.** Ибрагимов И. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 1, 13—16

Пусть $W^{(s)}V$ обозначает класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[-1,+1]$, вообще говоря, дробную производную $f^{(s)}(x)$ с ограниченной вариацией, не превышающей единицу, и пусть $E_n(f)_L$ — наилучшее приближение f на $[-1,+1]$ в среднем (в смысле L) при помощи алгебраических многочленов степени n. Тогда имеет место соотношение

$$\sup_{f\in W^{(s)}V}E_n(f)_L=\frac{1}{2\Gamma(s+1)}\times$$
$$\times\max_{-1\leqslant c\leqslant 1}E_n\left\{[(x-c)+|x-c|]\,|x-c|^{s-1}\right\}_L\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha+\beta}{n^{s+1}}+O(n^{-s-2}\ln n),\qquad(1)$$

где

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}n^{s+1}E_n[x|x|^{s-1}]_L,$$
$$\beta=\lim_{n\to\infty}n^{s+1}E_n[|x|^s]_L.$$

Для каждой индивидуальной функции рассматриваемого класса имеет место неравенство

$$E_n(f)_L\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2\Gamma(s+1)n^{s+1}}\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|(1-c_k^2)^{\frac{s+1}{2}}+$$
$$+o(n^{-s-1}),\qquad(2)$$

где c_k — точки разрыва $f^{(s)}(x)$, $B_k=f^{(s)}(c_k+0)-f^{(s)}(c_k-0)$.

Эти результаты при целом s были получены референтом (Докл. АН СССР, 1947, **55**, 195—198; 1947, **58**, 185—188). В этом случае одно из чисел α или β равно нулю и неравенства (1) и (2) на самом деле представляют собой асимптотические равенства.

В статье, даже в формулировках, имеются неточности и опечатки.

С. М. Никольский

664. **О замкнутых множествах рациональных функций.** Сас (On closed sets of rational functions. Szász Otto), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 195—218 (англ.)

Доказывается ряд теорем о замкнутости некоторых систем рациональных функций в различных пространствах. Некоторые из этих теорем публикуются впервые, для других даются новые доказательства. Автор указывает, что главное в статье — общий элементарный метод доказательства таких теорем, впервые примененный автором для установления необходимых и достаточных условий замкнутости последовательности $\{t^{\lambda_\nu}\}$, $\nu=1,2,\ldots$, $\mathrm{Re}\,\lambda_\nu>-\frac{1}{2}$, в пространстве $L_2(0,1)$ (см. Szász O., Math. Ann., 1916, **77**, 482—496). Как известно, таким условием является

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1+2\operatorname{Re}\lambda_\nu}{1+|\lambda_\nu|^2}=\infty.$$

Основные этапы доказательства этой теоремы следующие:

а) Берется специальная последовательность $\{t^{\mu_\nu}\}$, заведомо замкнутая; можно положить, например, $\mu_\nu=\nu-1$.

б) Находится минимум

$$m_n=\min_{u_\nu}\int_0^1\left|\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu t^{\lambda_\nu}\right|^2 dt=$$

$$=\min\sum_{\mu,\nu=0}^{n}u_\mu\bar{u}_\nu\frac{1}{\lambda_\mu+\lambda_\nu+1},$$

где $u_0=1$, λ_0 — одно из чисел μ_k, а числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ принадлежат к рассматриваемой последовательности $\{\lambda_\nu\}$.

в) Последовательность $\{t^{\lambda_\nu}\}$ замкнута тогда и только тогда, когда $m_n\to\infty$ при $n\to\infty$ для каждого k.

По этой схеме проводится доказательство и других теорем о замкнутости. Ниже приводятся некоторые из них.

Теоремы 1 и 2. Последовательности $\{(x^2+z_\nu^2)^{-1}\}$ и $\{x(x^2+z_\nu^2)^{-1}\}$ $(\operatorname{Re}z_\nu>0,\ \nu\geqslant 1)$ замкнуты в $L_2(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}z_\nu}{1+|z_\nu|^2}=\infty.$$

Теорема 5. Если $0<c\leqslant 1$, $|z_\nu|<1$, $\Sigma(1-|z_\nu|)=\infty$ то последовательность $(ct-z_\nu)/(1-\bar{c}tz_\nu)$ замкнута в $C(-1,1)$.

Теорема $9''$. Если выполнены условия

$$\operatorname{Re}\zeta_\nu>\frac{1}{2},\qquad\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{Re}\zeta_\nu-1}{1+|\zeta_\nu-1|^2}=\infty,$$

то последовательность $\{(x^2+\zeta_\nu)^{-1}\}$ замкнута в пространстве всех непрерывных на $[0,\infty]$ функций, обращающихся в нуль при $x=\infty$.

В статье рассматриваются также аналогичные вопросы для пространств H^p $(p\geqslant 1)$ функций, голоморфных в единичном круге. *Б. И. Коренблюм*

665. Один пример теории приближения функций. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 26—31

Дано явное выражение многочлена степени не выше n, наименее отклоняющегося от данной функции на заданной системе из $(n+2)$ точек. Аналогичная задача решается для системы из $(2n+2)$ точек и тригонометрического многочлена порядка не выше n. (См. по этому поводу Vallé-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919). Приводятся примеры.

Отметим следующую неточность: если $T_n(x)$ наименее отклоняется от $f(x)$ на точках x_k $(k=1,2,\ldots,2n+2)$ и $T_n'(x_k)=f'(x_k)$, то отсюда не следует, что $T_n(x)$ будет наименее отклоняться от $f(x)$ и на всей оси. *И. П. Натансон*

666. Об одном неравенстве С. Н. Бернштейна. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 32—37

Автор получает другим способом неравенство С. Н. Бернштейна (Изв. АН СССР, 1931, № 9, 1151—1161) для тригонометрического полинома T_{m-h} порядка $m-h$.

Если $|T_{m-h}(\tau_k)|\leqslant 1$, где $\tau_k=\frac{k\pi}{m}$ $(k=0,1,\ldots,2m-1)$, то для всех действительных Θ

$$|T_{m-h}(\Theta)|\leqslant L_n,$$

где

$$L_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}},\ \text{если}\ 2n=\frac{m}{h}\ —\ \text{целое}$$

четное, и

$$L_n=\frac{1}{2n+1}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}\right],$$

если $2n+1=\frac{m}{h}$ — целое нечетное.

Знак равенства достигается для полинома

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(2n+1)\left(\frac{\pi}{4n}+h\Theta\right)}{\cos\frac{2k+1}{4n}\pi}$$

в первом случае и

$$\frac{1}{2n+1}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k\left(\frac{\pi}{2n+1}+2h\Theta\right)}{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}\right]$$

во втором случае.

С. Н. Бернштейном явно рассмотрен случай, когда

$\tau_k=\frac{2k\pi}{2m+1}$ $(k=0,1,\ldots,2m)$ и $n=\frac{2m+1}{2h+1}$ есть целое число. *И. Г. Соколов*

667. О скорости сходимости последовательности линейных операций. Лозинский С. М., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 609—612

О скорости сходимости последовательности линейных тригонометрических полиномиальных операций. Лозинский С. М., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 5, 785—797

Функциональное пространство E называется пространством типа $\tilde{F}_\nu$, если оно удовлетворяет первым ν из следующей системы аксиом: 1) Элементы E — функции, принимающие вещественные значения, определенные на всей вещественной оси. 2) При обычном определении сложения функций и умножения функции на число E есть пространство Банаха. 3) Если $f(t)\in E$, то, при любом вещественном α, $f(t+\alpha)\in E$ и $\|f(t+\alpha)\|\leqslant K\|f(t)\|$, где K не зависит от функции. 4) Любая функция $f(t)\in E$ имеет период 2π и суммируема на $(0,2\pi)$. 5) Существует некоторое множество G суммируемых периода 2π функций такое, что если $f(t)\in E$ и $g(t)\in G$, то

$\int_0^{2\pi} |f(t)\,g(t)|\,dt < \infty$, $\|f\| = \sup_{g \in G} \int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$, если $g(t) \in G$, то и $g(t+\alpha) \in G$ при всяком $-\infty < \alpha < \infty$, если $g(t) \in G$ и $h(t)$ есть измеримая периода 2π функция, для которой почти всюду $|h(t)| \leqslant 1$, то $g(t)\,h(t) \in G$. 6) E содержит все тригонометрические полиномы.

В таких пространствах рассматриваются классы непрерывных функций, характеризующиеся поведением разностей $\Delta_h^p f(x)$ порядка p при малых значениях h. Приводится ряд предложений, носящих в известном смысле отрицательный характер и дающих возможность обнаружить существование отдельных функций этих классов, для которых та или иная последовательность линейных операций либо не сходится с заданной быстротой, либо расходится. Пусть D и E — два пространства типа $\tilde{F}_6$; чаще всего D совпадает с E и, при некоторой константе $A > 0$, $\|f\|_E \leqslant A\,\|f\|_D$. Пусть, далее, функция $\omega(t)$ непрерывна, монотонно растет, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant K n^p\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)$ и $\lim_{t \to +0} \frac{t^p}{\omega(t)} = 0$. Если последовательность линейных операций U_n, отображающих D в E, ставит в соответствие каждой функции $f(x) \in D$ тригонометрический полином $(2n-1)$-го порядка, то для любого $\varepsilon > 0$ и для всякой подпоследовательности натуральных чисел n_k найдется функция $f(x)$ с абсолютно непрерывными производными до $(r-1)$-го порядка включительно и с r-й производной, принадлежащей D (обозначение — $f(x) \in D^{(r)}$) со свойствами

$$\max_x |f(x)| \leqslant \varepsilon,\ \|f^{(r)}(x)\| \leqslant \varepsilon,\ \sup_h \frac{\max_x |\Delta_x^p f(x)|}{\omega(h)} \leqslant 1,$$

$$\sup_h \frac{\|\Delta_h^p f^{(r)}(x)\|_D}{\omega(x)} \leqslant 1, \qquad (*)$$

и такая, что

$$\overline{\lim_{n_k \to \infty}} \frac{\|f - U_{n_k}(f)\|_E}{\frac{1}{n_k^r}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)} \geqslant B > 0.$$

Для любого модуля непрерывности $\omega(h)$, убывающего к нулю медленнее, чем h, существует непрерывная периода 2π функция $f(x)$ с неограниченными частными суммами ряда Фурье, удовлетворяющая условию

$$\|f(x+h) - f(x)\|_L = O[\omega(h)].$$

Приводятся утверждения применительно к некоторым последовательностям так называемых линейных тригонометрических полиномиальных операций. Для любых двух пространств D и E типа $\tilde{F}_6$ каждый тригонометрический полином $T(x)$ порождает совокупность линейных операторов $U_n(f;\ x)$, отображающих D в E так, что образами всех функций $f(x) \in D$ являются тригонометрические полиномы того же порядка, что и $T(x)$, а если $f(x)$ такой полином, то

$$U(f;x) = \sigma_T(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,T(x-t)\,dt.$$

Устанавливается, что в множестве этих операций (линейные тригонометрические полиномиальные операции типа T) операторы $\sigma_T(f;\ x)$ занимают особое место: для любой линейной операции $U(f;x)$ из данной совокупности справедливо неравенство

$$\|U\| \geqslant \|\sigma_T\|.$$

Остальные теоремы устанавливают, для отдельных функций рассматриваемых классов, оценки снизу величины порядка соответствующего отклонения по крайней мере для одной подпоследовательности натуральных чисел. Отметим одну из них. Пусть E — пространство типа $\tilde{F}_6$, T_n — последовательность тригонометрических полиномов порядка n, U_n — последовательность линейных тригонометрических полиномиальных операций типа T_n, обладающих тем свойством, что при любом α образами функций $f(x+\alpha)$ являются полиномы, полученные из $U_n(f;\ x)$ сдвигом аргумента на α (скользящие операции). Пусть, далее, $\omega(t)$ обладает указанными выше свойствами; тогда, если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \|\sigma_{T_n}\| > 0,$$

то при любом $\varepsilon > 0$ найдется функция $f(x) \in D^{(r)}$, удовлетворяющая условиям (*), и такая, что для всякого λ

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\lambda - U_n(f;0)| \geqslant B > 0.$$

Доказательства не приведены. *А. Ф. Тиман*

668. **О простых квадратурах.** Дейвис (On simple quadratures. Davis Philip), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 127—136 (англ.)

Пусть дан более или менее широкий класс S функций, R-интегрируемых на $[0,1]$. Если существует квадратурная формула вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,f(\lambda_i)$$

(абсциссы λ_i различны и фиксированы, а веса a_i не зависят от выбора частной функции $f \in S$), верная для всякой $f \in S$, то будем говорить, что класс S имеет простую формулу квадратур. Если, кроме того, $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$, то класс S имеет абсолютно сходящуюся простую квадратурную формулу.

Доказываются теоремы:

1) Класс C-функций, непрерывных на $[0,1]$, не имеет простой квадратурной формулы. 2) Класс P всех алгебраических многочленов имеет абсолютно сходящуюся простую квадратурную формулу с абсциссами λ_k в том и только том случае, если

$$\lim_{k \to \infty} \sup |\lambda_k| = \infty.$$

Высказываются некоторые соображения о существовании простых квадратурных формул для классов функций, промежуточных между классами P и C (в частности, для класса целых функций экспоненциального типа). *А. Х. Турецкий*

669. **О полной вариации решений проблемы моментов, имеющих ограниченную вариацию.** Блум (On the total variation of solutions of the bounded variation moment problem. Bloom Melvin), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 118—126 (англ.)

Функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\mu_n = \int_a^\infty t^n \, d\varphi(t), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\{\mu_n\}$ — заданная вещественная последовательность, а интегралы абсолютно сходятся, автор называет решением (μ, a) проблемы. Боас нашел, что для произвольной последовательности $\{\mu_n\}$ существует бесчисленное множество решений $(\mu, 0)$ проблемы; Полиа доказал существование бесчисленного множества решений $(\mu, -\infty)$ проблемы в виде целых трансцендентных функций, а также в виде ступенчатых функций с множеством точек разрыва, являющимся частью некоторого наперед заданного множества E, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии.

Пользуясь методом Полиа, автор показывает существование решений $(\mu, 0)$ проблемы двух типов, рассмотренных Полиа, причем полная вариация решения на всей вещественной оси сколь угодно близка к $|\mu_0|$; в качестве примера рассматривается частный случай

$$E = \{a, a^2, a^3, \ldots\}, \quad a \geqslant 2, \quad \mu_0 \neq 0.$$

Я. Л. Геронимус

670 РЖ. **Ряды Фурье, регулярность, расходящиеся ряды и эмпирические формулы.** Вернот (Séries de Fourier, régularité, séries divergentes et formulation expérimentale. Vernotte P., vol. I, pp. 105, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1952, 800 f.) [Рецензия: Потье (Pauthier S.), J. phys. et radium, 1953, 14, № 4, 275 (франц.)]

671 Д. **Применение А-интеграла к тригонометрическим рядам и некоторые локальные теоремы о сходимости рядов Фурье.** Ульянов П. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., МГУ, М., 1953

672 Д. **О наилучшем приближении в среднем суммируемых функций посредством целых функций конечной степени на всей вещественной оси.** Юсуф-заде Б. М. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Азербайджанский гос. пед. ин-т, Баку, 1953

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

673. **Исследования по абелевым и тауберовым теоремам, выполненные в Национальном институте приложений анализа.** Гидзетти (Ricerche abeliane e tauberiane compiute nell'Instituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Ghizzetti Albo), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, 34, 113—132 (итал.)

Дается обзорная статья, охватывающая период 1935—1952 гг. Большинство результатов опубликовано в различных итальянских журналах и в серии публикаций Национального института приложений анализа.

Термины абелевы и тауберовы теоремы автор понимает в более широком смысле, чем общепринято; он называет так всякую теорему, устанавливающую связь между свойствами функций и их линейных функциональных преобразований.

Излагаемые в статье исследования группируются вокруг следующих вопросов:

а) Необходимые и достаточные условия, при которых функция $f(s)$ является преобразованием Лапласа

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) \, dt,$$

где $F(t)$ удовлетворяет, например, условию

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} |F(t)|^2 \, dt < \infty$$

(α фиксировано и > 0). Искомые условия формулируются в терминах разложимости $f(s)$ в ряды специального вида, например (при $\alpha = 1$),

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^\infty c_n \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n,$$

$$\left(\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=0}^\infty |c_n|^2 < \infty\right)$$

(Picone M., Memoria Accad. Italia, 1935, 6, № 12, 643—667; Rend. Accad. Lincei, 1935, сер. 6, 21, 306—313; там же 1938, сер. 6, 28, 339—348).

б) Различные обобщения и уточнения классической формулы Римана обращения интеграла Лапласа (см. Amerio L., Rend. Accad. Sci. Napoli, сер. 1939—1940, сер. 4, 10, 232—259).

в) Уточнение условий, при которых справедлива теорема о свертывании

$$\int_0^\infty \varphi_1(t) * \varphi_2(t) * \cdots * \varphi_n(t) \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_1(t) \, dt \cdot \int_0^\infty \varphi_2(t) \, dt \cdots \int_0^\infty \varphi_n(t) \, dt, \qquad (1)$$

где $\varphi_1(t) * \varphi_2(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\tau) \varphi_2(\tau) \, d\tau$. Как показал Гидзетти, равенство (1) справедливо при условии, что все интегралы в правой части сходятся и, кроме того, $\varphi_i(t) = O(t^{-1})$ $(t \to \infty;\ i = 1, 2, \ldots, n)$ (см. Ghizzetti A., Rend. Sem. Facoltà Sci. Univ. Cagliari, 1951 — 1952, 21, 103—115).

г) Нахождение достаточных условий, при которых тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f(x)$, суммируемой в интервале $(0,2\pi)$ или имеющей непрерывную производную определенного порядка. Чезари дал условия, аналогичные условиям Сидона и Колмогорова, но использующие разности $\Delta^\sigma a_n$, $\Delta^\sigma b_n$ произвольного порядка $\sigma > 0$; им же рассмотрен случай аналитической функции $f(x)$ (см. Cesari L., Boll. Unione mat. ital., 1938, сер. 1, **17**, 105—116; Rend. Circolo Mat. Palermo, 1937, **61**, 269—295; Rend. Accad. Sci. Napoli., 1937—1938, сер. 4, **8**, 89—97).

д) Необходимые и достаточные условия для представимости данной последовательности $\{c_k\}$ в виде $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, где $f(x)$ действительна и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Как показал Гидзетти, таким условием является положительная определенность последовательности $\ldots s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1 s_2, \ldots$, определяемой формулами

$$s_0 = 2\sin \pi c_0, \quad s_{-k} = \bar{s}_k,$$

$$\exp\left\{-2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\right\} = 1 - ie^{\pi i c_0} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{s}_k z^k$$

(см. Ghizzetti A., Ann. Scuola Norm. Pisa, 1950, сер. 3, **4**, 131—156). Аналогичные условия найдены и для степенных моментов (см. Ghizzetti A., Rend. Sem. mat. Univ. Politecnico Torino, 1948—1949, **8**, 93—167). *Б. И. Коренблюм*

674. Формулы Парсеваля для монотонных функций. IV. Эдмондс (The Parseval formulae for monotonic functions. IV. Edmonds Sheila M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 218—229 (англ.)

Работа является продолжением серии работ автора (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, **43**, 289—306; 1950, **46**, 231—248; 1950, **46**, 249—267). В этих работах были указаны условия, при которых справедливы равенства Парсеваля

$$\int_0^{\infty} F_c(x)\, G_c(x)\, dx = \int_0^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt, \qquad (1)$$

$$\int_0^{\infty} F_s(x)\, G_s(x)\, dx = \int_0^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt, \qquad (2)$$

где $F_c(x)$, $G_c(x)$; $F_s(x)$, $G_s(x)$—косинус-преобразования (соответственно синус-преобразования) функций $f(t)$, $g(t)$. При этом предполагалось, что две из четырех функций монотонны. В некоторых из этих условий предполагалось также существование (в обычном смысле) одной части равенств (1) или (2), в других условиях этого не требовалось, так что обе части равенств (1) и (2) могли быть конечны (и равны) или равны $+\infty$. Условия второго типа встречаются в случае синус-преобразований.

В реферируемой работе строятся два примера. Из первого примера следует, что неверны следующие утверждения:

1) если f и g монотонно стремятся к нулю, то равенство (1) имеет место в «конечном или в бесконечном» смысле;

2) если f и G_c монотонно стремятся к нулю, то равенство (1) имеет место в «конечном или бесконечном» смысле.

Второй пример относится к случаю, когда только одна из четырех функций монотонна. Доказывается, что существует функция $f(t)$, стремящаяся монотонно к нулю при $t \to +\infty$, такая, что

$$F_{\pi/x}(x) \to \infty, \ \lim\{F_s(x)/F_{\pi/x}(x)\} = 0 \text{ при } x \to 0\ (x > 0),$$

причем

$$F_T(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T f(t) \sin xt\, dt.$$

Аналогичные результаты доказываются для рядов Фурье. Приводятся некоторые поправки к первым двум цитированным работам автора.

Б. М. Левитан

675. По поводу одной заметки Эмбера. Агарвал (A propos d'une note de M. Pierre Humbert. Agarwal Ratan Prakash), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 21, 2031—2032 (франц.)

Обобщаются результаты исследований Эмбера (Humbert P., C. r. Acad. Sci., 1953, **236**, 1467). Эти исследования опираются на рассмотрение преобразования Лапласа функции Миттаг-Леффлера

$$E_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(\alpha m + 1)}.$$

Вводится функция

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+\frac{\beta-1}{2}}}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \quad (E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x)).$$

Утверждается, что, пользуясь методом Эмбера, можно из легко получаемого преобразования Лапласа функции $E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)$ вывести следующие соотношения:

$$\int_0^t E_{\alpha,\beta}(\lambda^\alpha)\frac{(t-\lambda)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\, d\lambda = E_\alpha(t^\alpha) - 1,$$

$$\int_0^t E_{\alpha,\beta}(\lambda^\alpha)\left[\frac{(t-\lambda)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \frac{(t-\lambda)^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] d\lambda = t,$$

$$\int_0^t E_{2\alpha,\beta}(\lambda^{2\alpha})\left[\frac{(t-\lambda)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} + \frac{(t-\lambda)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] d\lambda = E_\alpha(t^\alpha)$$

и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} E_{\alpha,\beta}(\lambda^\alpha)\, e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}\, d\lambda = t^{\frac{\beta}{2}} E_{\frac{\alpha}{2},\frac{\beta+1}{2}}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Кроме того, утверждается, что изображение функции

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{\Gamma(\alpha m+\beta)\,\Gamma(m+1)},$$

обобщающей функцию Бесселя мнимого аргумента и, как указывает автор, введенной Райтом (Wright E. M., J. London Math. Soc., 1933, 8, 71), равно $E_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{p}\right)$. (Этот результат неверен, так как

$$\Phi_{\beta,\alpha}(t)\doteqdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^{-m}}{\Gamma(\alpha m+\beta)}=p^{\frac{\beta-1}{2}}E_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{p}\right)\Big).$$

Доказательства не приводятся. *В. И. Левин*

676. **Две теоремы операционного исчисления.** Тосар (Two theorems on operational calculus. Thosar Yeshwant V.), Math. Z., 1953, 57, № 3, 336—348 (англ.)

Доказываются две теоремы:

1) Если $f(p)\doteqdot h(x)$ и $f(\sqrt{p})\doteqdot\sqrt{x}F\left(\frac{1}{x}\right)$, то $F(p)\doteqdot\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$.

2) Если $f(p)\doteqdot h(x)$ и $h(x^2)\doteqdot\frac{2}{p}F\left(\frac{p^2}{4}\right)$, то $F(p)\doteqdot\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$.

Приводится несколько примеров операционных соотношений, получающихся из ранее известных при применении этих теорем:

$$\sqrt{2}\,n!\;pD_{-n-1}(2p)\doteqdot D_n(x)\;\;(x>1),$$

$$(-1)^n\Gamma(n+1)\sqrt{2}\,pD_{-n-1}(\sqrt{2}p)\,D_{-n-1}(-\sqrt{2}p)\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{\{1-\sqrt{1-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}}\;\;(\mathrm{Re}\,n>-1),$$

$$2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)pD_{-m}(2\sqrt{p})\doteqdot$$

$$\doteqdot\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{(x-1)^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+1}{2}}} & x>1\end{cases}\;\;(\mathrm{Re}\,m>0),$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{n!}\frac{(-1)^m(2n)!}{2^{2n+m}}\frac{p}{(p+1)^{\frac{2n+m+1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right)\doteqdot$$

$$\doteqdot e^{-x}x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x)$$

и др. (Обозначения см. Диткин В. А., Кузнецов П. Н., Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М. — Л., 1951.) *А. И. Лурье*

См. также 532, 533, 540, 541, 603, 621, 624, 626, 682, 684, 693, 696, 698, 720, 735, 740 **РЕЦ**, 752—754, 761, 778, 788, 789, 795, 803, 810, 895, 903, 905, 911 **РЕЦ**, 940, 970

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

677. **О лакунарных рядах Тейлора. Нобл** (On Taylor series with gaps. Noble M. E.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 197—203 (англ.)

Будем говорить, что функция $g(z)$, регулярная в круге $|z|<1$, удовлетворяет условию (D) в точке $z_0=e^{i\theta_0}$, если она ограничена в области $\rho_0\leqslant|z|<1$, $|\arg z-\theta_0|\leqslant\delta_0$ и

$$\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}\left|\frac{g(\rho e^{i\theta})}{e^{i\theta_0}-\rho e^{i\theta}}\right|d\theta\to 0$$

при $\delta\to 0$ равномерно относительно ρ, $\rho_0\leqslant\rho<1$. Доказывается теорема:

Пусть ряд $f(z)=\sum_0^{\infty}a_mz^m$ имеет радиус сходимости $R=1$ и $f(z)\to A(z_0)$ при $z\to z_0$ таким образом, что $f(z)-A(z_0)$ удовлетворяет условию (D) в точке z_0. Если имеются неубывающие последовательности $\{n_k\}$ и $\{N_k\}$ такие, что $a_m=0$ при $n_k<m\leqslant N_k$, и $\varphi(n_k)=o(N_k-n_k)$, где $\varphi(x)$ — вогнутая мажоранта для $\{\ln(|a_{n_k}|+2)\}$ $(\ln(|a_n|+2)\leqslant\varphi(n))$, то тогда $\sum_{m=0}^{n_k}a_mz_0^m\to A(z_0)$ при $z\to z_0$. Эта теорема является обобщением результата Эрдёша и Пираняна (Erdös P., Piranian G., Duke Math. J., 1947, **14**, 647—658). *А. Ф. Леонтьев*

678. **О пропусках в рядах Лорана. Эрве** (Über die Lücken bei Laurentreihen. Erwe Friedhelm), Arch. Math., 1953, **4**, № 1, 28—30 (нем.)

Пусть $f(z)=\sum_{\nu=0}^{r}a_\nu z^{n_\nu}$, $n_0=n_1<\ldots<n_r$ — целые числа, $a_\nu\neq 0$, $0\leqslant r\leqslant\infty$.

Положим

$$\alpha_\mu(z)=\begin{vmatrix} f(z) & \left(z\frac{d}{dz}\right)f(z) & \ldots & \left(z\frac{d}{dz}\right)^{\mu}f(z)\\ \left(z\frac{d}{dz}\right)f(z) & \left(z\frac{d}{dz}\right)^{2}f(z) & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \left(z\frac{d}{dz}\right)^{\mu}f(z) & \ldots & \ldots & \left(z\frac{d}{dz}\right)^{2\mu}f(z)\end{vmatrix},$$

тогда $\lim_{z\to 0}\frac{\alpha'_\mu(z)}{\alpha_\mu(z)} = n_0 + n_1 + \ldots + n_\mu$ при $0 \leqslant \mu \leqslant r$ и $\alpha_\mu(z) \equiv 0$ при $\mu > r$. *М. А. Евграфов*

679. Об арифметических свойствах показателей ряда Дирихле. Мандельбройт (Sur les propriétés arithmétiques des exposants d'une série de Dirichlet. Mandelbrojt Szolem), C. r. Acad. sci., 1953, 236, №15, 1464—1466 (франц.)

Приводятся без доказательства три теоремы, в которых устанавливается, при каких условиях прямая сходимости ряда Дирихле является для суммы ряда купюрой в некотором особом смысле.

Пусть ряд $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$; $s = \sigma + it)$ с абсциссой сходимости $\sigma_c = 0$ представляет однозначную функцию $f(s)$. Пусть R_a $(a < 0)$ — пересечение области существования $f(s)$ с полуплоскостью $\mathrm{Re}\,(z) > a$; S_a — дополнение к R_a в $\mathrm{Re}\,(z) > a$; $S_{a\varepsilon}$ — множество точек s таких, что $|s - z| \leqslant \varepsilon$, где $z \in S_a$; $R_{a\varepsilon}$ — дополнение к $S_{a\varepsilon}$ в $\mathrm{Re}\,(z) > a$; Σ_a — множество точек α прямоугольника $a \leqslant \sigma \leqslant 0$, $|t| \leqslant \pi$ таких, что при некотором целом $k\,(k = k(\alpha))$ $\alpha + 2k\pi i \in S_a$; $\overline{\Sigma}_a$ — замыкание Σ_a. Если $\overline{\Sigma}_a$ содержит отрезок $\sigma = 0$, $|t| \leqslant \pi$, то прямую сходимости ряда Дирихле автор называет купюрой по модулю $2\pi i$. Пусть $(\lambda_n) = \lambda_n - [\lambda_n]$ ($[\lambda_n]$—целая часть λ_n); E—множество, состоящее из точек $\{(\lambda_n)\}$; $\nu(\alpha)$ $(\alpha \in E)$—число, показывающее, сколько раз α встречается в $\{(\lambda_n)\}$; $\lambda(\alpha)$ — наименьшее λ_n такое, что $(\lambda_n) = \alpha$. Если α — изолированная точка E, то пусть $l(\alpha)$ — наибольшее число q такое, что в интервале $(\alpha - 2q, \alpha + 2q)$ нет других точек E.

В первой теореме утверждается, что если $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, $\lim \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0$, функция $f(s)$ ограничена в $R_{a\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$ и некотором a и существует бесконечная последовательность $\{\alpha_p\}$ изолированных точек E таких, что $\lim \frac{\nu(\alpha_p)}{\lambda(\alpha_p)} = 0$, то прямая сходимости для ряда является купюрой по модулю $2\pi i$. *А. Ф. Леонтьев*

680. Заметка о ряде Дирихле. IV. Об особых точках ряда Дирихле. Танака (Note on Dirichlet series. IV. On the singularities of Dirichlet series. Tanaka Chuji), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 308—309 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть ряд $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ $(s = \sigma + it;\ 0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty)$ имеет конечную абсциссу сходимости σ_c. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, то существует ряд $\sum_1^\infty b_n e^{-\lambda_n s}$ со следующими свойствами: прямая $\sigma = \sigma_c$ является для суммы ряда естественной границей; коэффициенты b_n таковы, что или

$|b_n| = |a_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} |\arg(a_n) - \arg(b_n)| = 0$, или

$$\arg(b_n) = \arg(a_n)\ (n = 1, 2, \ldots),\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{a_n}\right| = 1.$$

А. Ф. Леонтьев

681. Об абсциссах сходимости обобщенного факториального ряда. Танака (On the convergence-abscissas of the generalized factorial series. Tanaka Chuji), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 150—160 (англ.)

Рассматривается ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n)}, \qquad (1)$$

$$s = \sigma + it,\ \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

где

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty,\ |\varphi_n| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} = \infty$, $\varphi_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, был рассмотрен Ландау (Landau E., Münchener Ber., 1906, **36**, 151—218), который при некоторых дополнительных предположениях определил абсциссы сходимости ряда (1) через его коэффициенты a_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Если λ_n комплексны, то, вообще говоря, область сходимости ряда (1) не будет полуплоскостью. Сходимость ряда (1) рассматривается в s-плоскости, из которой исключены малые окрестности точек $-\lambda_n$.

Доказываются теоремы:

1. При $\varphi_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ абсцисса сходимости σ_s ряда (1), абсцисса равномерной сходимости σ_u и абсцисса абсолютной сходимости σ_a связаны между собой следующим образом: $\sigma_s = \sigma_u \leqslant \sigma_a$.

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \infty$, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ряд (1) сходился (абсолютно) в точке $s = s_0$ $(s_0 \neq \lambda_n)$, состоит в том, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (соответственно $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$) сходился.

3. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} = \infty$ и $\varphi_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\sigma_s = \sigma_u = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{l_n} \ln\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{\varphi(l_\nu) - \varphi(l_n)}\right|.$$

$$\sigma_a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{l_n} \ln\left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|\, e^{\varphi(l_\nu) - \varphi(l_n)}\right),$$

где $l_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{r_\nu}$, а $\varphi(x)$ — положительная дифференцируемая функция, определенная при $x > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\varphi(x) \uparrow \infty$, $\varphi'(x) \to \infty$ при $x \to \infty$; 2) при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$ $\int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon x} |\varphi'(x)|\, dx < \infty$.

Полагая $\varphi(x) = x^2$, автор получает в качестве следствия теорему Форта (Fort T., Trans. Amer. Math. Soc., 1929, **31**, № 2, 233—240), утверждающую, что при предположениях теоремы 3 абсциссы сходимости σ_s и σ_a ряда (1) совпадают с соответствующими абсциссами сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-l_n s}.$$

В. С. Виденский

682. **О приближении функций частными суммами ряда по полиномам Фабера. Альпер С. Я., Иванов В. В.**, Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 3, 325—328

Пусть функция $f(z)$ непрерывна на ограниченном и не разбивающем плоскость континууме K, $\{\Phi_k(z)\}$ — полиномы Фабера для K, $\{a_k\}$ — коэффициенты Фабера функции $f(z)$ относительно K.

Положим

$$\delta_n(z) = \left| f(z) - \sum_{0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| \text{ для } z \in K.$$

Теорема 1. Если область D ограничена конечным числом гладких дуг, составляющих между собой углы, внешние растворы которых не меньше $\lambda\pi$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$, и функция $f(z)$, аналитическая в области D, имеет непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ p-ую производную с модулем непрерывности $\omega_p(\delta)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_1, что для $z \in \overline{D}$ при $p > 0$

$$\delta_n(z) < C_1 n^{-\lambda p + \varepsilon} \omega_p(n^{-\lambda+\varepsilon}),$$

а при $p = 0$

$$\delta_n(z) < C_1 \omega(n^{-\lambda+\varepsilon}) (\ln n)^2.$$

Теорема 2. Если l — незамкнутая жорданова кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, углы между которыми не меньше $\lambda\pi$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$, а определенная на l функция $f(z)$ имеет непрерывную p-ую производную с модулем непрерывности $\omega_p(\delta)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_2, что для $z \in l$ при $p > 0$

$$\delta_n(z) < C_2 n^{-\lambda p + \varepsilon} \omega_p(n^{-\lambda+\varepsilon}),$$

а при $p = 0$

$$\delta_n(z) < C_2 \omega(n^{-\lambda+\varepsilon}) (\ln n)^2.$$

Оценки сверху для наилучшего приближения при приведенных выше условиях, аналогичные оценкам для $\delta_n(z)$, были получены С. Н. Мергеляном (Усп. мат. наук, 1952, **7**, № 2 (48), 31—122); таким образом показано, что частные суммы ряда по полиномам Фабера дают в условиях теорем 1 и 2 приближение, близкое к наилучшему приближению.

П. К. Суетин

683. **О представлении аналитических функций бесконечными рядами. Ньюнс** (On the representation of anayltic functions by infinite series. Newns W. F.), Philos. Trans. Roy. Soc., London, 1953, сер. 2, 245, № 900, 429—468 (англ.)

Дано векторное пространство F над числовым полем K и последовательность $\{F_s\}$ подпространств, причем $F = \bigcup_{s=1} F_s$ и $F_s \subset F_{s+1}$. Каждое F_s есть пространство типа $\mathfrak{F}$ с топологией $\mathfrak{T}_s^{(\omega)}$, причем топология $\mathfrak{T}_{s+1}^{(\omega)}$ на F_s «грубее» (*coarser*), чем $\mathfrak{T}_s^{(\omega)}$. Каждая топология $\mathfrak{T}_s^{(\omega)}$ есть некоторая $\mathfrak{F}$-топология, которая «грубее» топологии $\mathfrak{T}_{s,(\omega)}$, определенной как верхний предел последовательности топологий, заданных на F_s при помощи полунорм. Сходимость в F понимается так: $x_n \to x$, если $\{x_n\} \subset F_s$ для некоторого s и $x_n \to x$ $(\mathfrak{T}_s^{(\omega)})$. Так, топологизированное пространство F автор называет $\mathfrak{F}_+$-пространством и его топология обозначается $\mathfrak{T}_+$. Вводится также понятие абсолютной сходимости в F. Изучаются разложения вида $x = \Sigma \alpha_k x_k$, $\alpha_k \in K$, $x_k \in F$, $x \in F$ в пространствах типа $\mathfrak{F}_+$.

Вводятся понятия базиса (обычное), абсолютного базиса (соответствующее абсолютной сходимости). Отметим теорему:

Пусть F пространство типа $\mathfrak{F}_+$. Если для некоторого фиксированного s каждый $x \in F_s$ представим рядом

$$x = \sum \alpha_k x_k \qquad (1)$$

в $\mathfrak{T}_+$, то существует такое σ (не зависящее от x), что каждый $x \in F_s$ представлен рядом (1) в топологии $\mathfrak{T}_\sigma^{(\omega)}$. Аналогичная теорема доказывается для абсолютных разложений.

Пусть $\{z_n\}$ — базис F. Множество $\{p_k\} \subset F$ называется базисным множеством, если все $p_k \neq 0$ и существует двойная последовательность элементов поля K $\{\Pi_k(z_n)\}$ такая, что $z_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(z_n) p_k (\mathfrak{T}_+)$. Следует различать базис и базисное множество. В последнем случае ничего не говорится, в частности, о единственности разложения и может, например, быть $p_k = p_j$ $(k \neq j)$.

Формально:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(x) z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Z_n(x)\ \Pi_k(z_n)\ p_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_k(z_n) Z_n(x) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(x) p_k, \qquad (2)$$

где $\Pi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_k(z_n) Z_n(x).$ (3)

Формальный ряд

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(x)\, p_k \qquad (4)$$

называется базисным рядом и $\Pi_k(x)$ — базисными коэффициентами. Базисное множество называется эффективным для E в топологии $\mathfrak{T}$, если каждый элемент пространства E представим своим базисным рядом, сходящимся в топологии $\mathfrak{T}$.

Доказываются теоремы: 1) Если $\Pi_k(x)$ определен (т. е. ряд (3) сходится) для всех $x \in F_s$, то $\Pi_k \in F_s^*$ (здесь F_s^* — пространство линейных функционалов над F_s).

2) Если базисное множество эффективно для F_s в $\mathfrak{T}_+$, то оно эффективно для F_s в некоторой $\mathfrak{T}_{\Pi}^{(\omega)}$.

3) Если ряд (4) сходится в $\mathfrak{T}_+$ для всех x, то $B(x) \equiv x$.

Допустим, что ряд (3) сходится при всех k и x. Положим:

$$q_{\sigma}^{(l)}(x) = \max_{\mu,\nu} \left| \sum_{k=\mu}^{\nu} \Pi_k(x)\, p_k \right|_{\sigma}^{(l)}$$

(значок $|a|_{\sigma}^{(l)}$ означает l-ую полунорму элемента a из последовательности полунорм, задающих топологию $\mathfrak{T}_{\sigma,(\omega)}$).

4) Чтобы базисное множество $\{p_k\}$ было эффективным для F в $\mathfrak{T}_+$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого s существовало такое σ, что для заданного l найдутся M, j, для которых $q_{\sigma}^{(l)}(x) \leqslant M |x|_s^{(j)}$, при всех $x \in F_s$.

Доказывается еще ряд теорем, подобных приведенным.

Аналогичные результаты получены для абсолютной эффективности. Изучается также вопрос о единственности разложений по элементам базисного множества. Свои общие понятия и теоремы автор прилагает к теории разложения в ряды аналитических функций, рассматривая различные пространства аналитических функций. Полученные при этом результаты являются новыми или обобщают ранее известные теоремы (главным образом Уиттекера). В последней главе изучаются соотношения между данной системой $\{p_s\}$ и различными ассоциированными с ней системами. *С. Я. Хавинсон*

684. О приближении аналитической функции рациональными функциями. Эллиотт (On approximation to analytic functions by rational functions. Elliott H. Margaret), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 161—167 (англ.)

Если функция $f(z)$ является аналитической в области, ограниченной конечным числом кривых Жордана, и обладает непрерывной производной $f^{(k)}(z)$, имеющей на контуре модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то она может быть приближена рациональной функцией

$$r_n(z) = \frac{a_{n0} z^n + a_{n1} z^{n-1} + \ldots + a_{nn}}{(z-\alpha_{n1})(z-\alpha_{n2})\ldots(z-\alpha_{nn})}$$

с заранее заданными полюсами α_{ni}, лежащими вне области и не скопляющимися к ее границе, причем степень приближения характеризуется неравенством

$$|r_n(z) - f(z)| < M\omega(1/n)/n^k.$$

Автор указывает, что доказательство этой теоремы, данное Сьюэллом (Sewell W. E., Rev. scienc., 1939, **41**, 435—451) при несколько более ограничительных предположениях, было ошибочным.

Предлагается также доказательство обратной теоремы, позволяющей судить о модуле $\omega(\delta)$ по скорости убывания приближения функции $f(z)$ рациональной функцией вида $r_n(z)$ (это было сделано автором для случая полиномов раньше, Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **71**, № 1, 1—23). *В. Л. Гончаров*

685. Разложение мероморфной функции в интерполяционный ряд. Уолш (An interpolation series expansion for a meromorphic function. Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 1, 1—9 (англ.)

Известно (Walsh J. L., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1935, **20**, 222 (Corollary 2)), что функция $f(z)$, мероморфная во всей конечной плоскости, разлагается в интерполяционный ряд

$$f(z) = \frac{a_1}{z-\alpha_1} + a_2 \frac{z-\beta_1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)} + \ldots, \qquad (1)$$

где все полюсы $f(z)$ находятся среди точек α_k, а β_k — узлы интерполяции. Доказывается, что функция $f(z)$, мероморфная в окрестности нуля, за исключением, быть может, самой точки 0 (которая является тогда либо существенно особой точкой, либо предельной точкой полюсов), представима в окрестности нуля интерполяционным рядом вида (1).

Теорема 1. Пусть жорданова кривая C_1, содержащая внутри себя начало 0, лежит внутри жордановой кривой C_0 и пусть последовательность $\{\alpha_k'\}$ стремится к нулю. Тогда существуют последовательность узлов интерполяций $\{\beta_k\}$ на C_1 и последовательность $\{\alpha_k\}$, для которой $\{\alpha_k'\}$ является подпоследовательностью, а остальные точки $\{\alpha_k'\}$ лежат на C_0, со следующим свойством: любая функция $f(z)$, аналитическая в $\bar{D}$ (замкнутая внутренность C_1), исключая, быть может, 0 и полюсы в точках $\{\alpha_k'\}$, представляется интерполяционным рядом вида (1), равномерно сходящимся к $f(z)$ на всяком замкнутом множестве, принадлежащем $\bar{D}$ и не содержащем точек 0 и $\{\alpha_k'\}$.

Теорема 2. Пусть C_0 и C_1 — окружности соответственно $|z| = 1$ и $|z| = r_1$, $1 > r_1$ и пусть последовательность $\{\alpha_k'\}$ стремится к 0. Пусть $\{M_n\}$ — монотонно неубывающая неограниченная последовательность целых чисел, $M_{n+1} \leqslant M_n + 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n/n = 0$; полагаем $N_n = n - M_n$. Пусть для любого n множество точек $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}$ состоит из точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{M_n}$ и всех значений $\sqrt[N_n]{1}$, а множество

точек $\beta_{n1}, \ldots, \beta_{nn}$ — из всех значений $\sqrt[M_n]{r_1^{M_n}}$ и $\sqrt[N_n]{r_1^{N_n}}$.

Тогда для произвольной функции $f(z)$, аналитической в $\overline{D}: |z| \leqslant r_1$ (исключая нуль и, быть может, полюсы в точках $\{\alpha_k'\}$), последовательность интерполяционных рациональных функций вида

$$r_n(z) = \frac{A_{n1}z^{n-1} + A_{n2}z^{n-2} + \ldots + A_{nn}}{(z-\alpha_{n1})(z-\alpha_{n2})\ldots(z-\alpha_{nn})} \left.\begin{array}{l} \\ \\ r_n(\beta_{nk}) = f)(\beta_{nk}) \end{array}\right\} \quad (2)$$

сходится к $f(z)$ равномерно на всяком замкнутом множестве, принадлежащем $\overline{D}$ и не содержащем 0 и точек $\{\alpha_k\}$.

Приведены примеры, показывающие, что без изменения условий и метода, сходимость $\{r_n(z)\}$ к $f(z)$ вне C_1 не может быть доказана.

Теорема 3 (доказывается тем же методом). Пусть C_0, C_1, C_2 — окружности соответственно $|z| = 1$, $|z| = r_1$, $|z| = r_2$, $1 > r_1 > r_2 > 0$. Пусть для любого n множество точек $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$ состоит из точек $\sqrt[M_n]{r_1^{M_n}}$ и $\sqrt[N_n]{r_1^{N_n}}$, а множество точек $\beta_{n1}, \ldots, \beta_{nn}$ состоит из точек $\sqrt[M_n]{r_1^{M_n}}$ и $\sqrt[N_n]{r_1^{N_n}}$, где $N_n = n - M_n$, а последовательность $\{M_n\}$ такая же, как в теореме 2. Тогда для произвольной функции $f(z)$, аналитической на множестве $r_3 < |z| \leqslant r_1$ $(r_2 \leqslant r_3)$, последовательность интерполяционных рациональных функций вида (2) сходится к $f(z)$ на множестве $r_3 < |z| \leqslant r_1$ (равномерно на всяком замкнутом подмножестве).

Теоремы 1—3 справедливы в предельном случае, когда C_2 и C_0 заменены точками 0 и ∞.

Я. И. Поляков

686. **Решение одной бесконечной системы линейных уравнений. Сан Хуан** (Résolution d'un système infini d'équations linéaires. San Juan R.), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 19, 1841—1843 (франц.)

Доказана теорема:

Система

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k m_k^n = C_n, \quad (1)$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} |C_n|^{1/n} < \infty$ и $m_{k+1}/m_k \geqslant (1 + k^{-1})^{\tau}$, $\tau > 2$, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$a_k = o(e^{-Mk}), \quad (2)$$

где $0 < M < \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\tau}$. При $\tau < 2$ система может не иметь ни одного решения, удовлетворяющего условию (2) с каким-либо положительным M.

Постановка задачи и метод решения отчасти близки к таковым же в статье А. О. Гельфонда и А. Ф. Леонтьева (Мат. сб., 1951, 29 (71) : 3, 477 — 500).

М. А. Евграфов.

687. **Аналитические функции и открытые отображения. Полак А.**, Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 617—618

Пусть через F обозначен полный прообраз круга $|w - w_0| \leqslant a$ при отображении, осуществляемом однозначной аналитической функцией $w = f(z)$. Предполагается, что множество F замкнуто, связно и лежит в области аналитичности $f(z)$ и что значение w_0 принимается лишь в одной точке. Через d обозначается наибольшее из расстояний между точками F, в которых функция $f(z)$ принимает равные значения.

Из одного ранее опубликованного результата автора (Докл. АН СССР, 1936, 1(10), № 4, 151—152) выводится теорема:

В условиях, сформулированных выше, для любого d', $0 < d' < d$, в круге $|w - w_0| \leqslant a$ найдется точка такая, что наибольшее расстояние между ее прообразами равно d'.

Следует отметить, что доказываемая теорема прямо следует из непрерывности функции $d(w)$ — наибольшего расстояния между прообразами точки w (непрерывность $d(w)$ обеспечивается тем, что в условиях теоремы над кругом $|w - w_0| \leqslant a$ лежит конечнолистный кусок римановой поверхности, не содержащий граничных точек этой поверхности).

Б. В. Шабат

688. **Об одной проблеме однолистных конформных отображений. Шилд** (On a problem in conformal mapping of schlicht functions. Schild Albert), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 43—51 (англ.)

Пусть регулярная и однолистная функция $w = f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, отображает единичный круг на область D и пусть d^* — расстояние от точки $w = 0$ до границы этой области; r_0 — радиус выпуклости функции $w = f(z)$; d_0 — наименьшее значение $|f(r_0 e^{i\varphi})|$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Автор устанавливает для некоторых подклассов однолистных функций неравенство

$$\frac{d_0}{d^*} \geqslant \frac{2}{3},$$

которое предполагается справедливым для всего класса этих функций.

Повидимому, автор не знаком с работой Г. М. Голузина (Мат. сб., 1935, 42 : 2, 169—189), в которой оценивается радиус выпуклости для семейства симметричных однолистных функций. На основании этой оценки и леммы Шварца элементарно получаются неравенства пункта 4 реферируемой работы без дополнительного требования звездообразности области.

Кроме того, требует критического рассмотрения беглая ссылка в пункте 5 на замечание Штуди, что число точек перегиба на линии уровня изменяется монотонно, так как в общем случае неверность этого утверждения следует из работы И. Е. Базилевича и Г. В. Корицкого (см. РЖМат, 1953, реф. 190).

И. Е. Базилевич

689. Теорема покрытия для выпуклых областей. Чжан Мин-юн (Ein Überdeckungssatz für konvexe Gebiete. Zhang Ming-yng), Sci. Record, 1952, 5, № 1—4, 17—21 (нем.)

Пусть регулярная и однолистная функция

$$w = f(z),\ |f'(0)| = 1,\ |z| < 1,$$

отображает единичный круг на выпуклую область C и пусть T' — радиус наибольшего круга, содержащегося в этой области.

Доказывается, что нижняя грань T этих радиусов в указанном множестве функций равна $\pi/4$, причем экстремальной областью является полоса $|\operatorname{Im}(w)| < \pi/4$. Таким образом для выпуклых областей определена константа Блоха — Ландау.

И. Е. Базилевич

690. Теорема вращения для функций, отображающих круг на звездообразные области. Гудман (The rotation theorem for starlike univalent functions. Goodman A. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 278—286 (англ.)

Рассматриваются следующие классы функций:

1) Класс S функций

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n z^n,$$

регулярных в круге $|z| = r < 1$ и отображающих его однолистно на области, звездообразные относительно начала координат, а также подклассы S_k этого класса, состоящие из функций

$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n z^{nk+1},$$

где k — целое положительное число.

2) Класс Σ функций

$$\Phi(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{\zeta^n},$$

отображающих область $|\zeta| = \rho > 1$ однолистно на области, дополнения которых звездообразны относительно начала координат.

Показывается, что точная верхняя граница величины $|\arg F'(z)|$, установленная для класса S В. Г. Строгановым (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1934, 5, 247 — 258) и для подклассов S_k — Б. М. Уразбаевым (Изв. АН Каз. ССР, сер. мат.-мех. 1948, 56, 102 — 121), может быть получена более простым путем.

Способ, примененный автором, позволил ему, кроме того, получить весьма просто точную оценку

$$|\arg F(z) - \arg z| \leqslant \frac{2}{k} \arcsin r^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

для класса S (при $k = 1$) и для подклассов S_k.

В классе Σ автором установлена точная оценка

$$|\arg \Phi(\zeta) - \arg \zeta| \leqslant 2 \arcsin \frac{1}{\rho}$$

и неточная оценка

$$|\arg \Phi'(\zeta)| \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\theta_0}{\rho + \cos\theta_0} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\theta_0}{\rho - \cos\theta_0} < \frac{3\pi}{2},$$

где

$$\cos\theta_0 = \frac{1 - \rho^2 + (\rho^4 + 3)^{1/2}}{2\rho},\quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

причем $^3/_2\pi$ для всей области $\rho > 1$ не может быть заменено меньшим числом.

Г. В. Корицкий

691. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце. Зморович В. А., Мат. сб., 1953, 32(74) : 3, 633—652

Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < q < |z| < 1$ и нормирована условием

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\, dz = 1,\quad q < r < 1.$$

Автор доказывает, что если $\operatorname{Re} f(z) > 0$ в этом кольце, то $f(z)$ можно представить в следующем виде:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(ze^{-i\theta})\, d\mu_1(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z} e^{i\theta}\right) d\mu_2(\theta) - 1, \qquad (1)$$

где $\mu_i(\theta)$, $i = 1,2$, — неубывающие на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции, $\mu_i(-\pi + 0) = \mu_i(-\pi) = 0$, $\mu_i(\pi) = 2\pi$, а

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} (z^k - z^{-k}).$$

При помощи функции Якоби $\vartheta_1(\xi, q)$ функция $F(z)$ выражается так:

$$F(z) = \frac{i}{\pi} Z_1\left(\frac{1}{2\pi i} \ln z; q\right),$$

где

$$Z_1(\xi; q) = \frac{d}{d\xi} \ln \vartheta_1(\xi; q).$$

Функция $w = F(z)$ дает отображение этого кольца на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ с разрезом вдоль прямолинейного отрезка, параллельного оси $\operatorname{Re} w = 0$ и симметрично расположенного относительно оси $\operatorname{Im} w = 0$, причем точки $z = 1$ и $w = \infty$ соответствуют друг другу.

Формула (1) является обобщением хорошо известной теоремы Рисса — Герглотца. При помощи представления (1) в § 2 устанавливаются структурные формулы для некоторых классов функций, однолистных в круговом кольце.

Так, если функция $f(z)$ является регулярной и звездной в кольце $q < |z| < 1$ (т. е. отображает кольцо на однолистную звездную область), то для нее получается представление:

$$f(z) = Cz \exp\left\{-\frac{1}{\pi} R(z)\right\}, \qquad (2)$$

где

$$R(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\widetilde{\vartheta}_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\left(ze^{-i\theta}\right);q\right)d\mu_1(\theta)-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\ln\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(ze^{-i\theta}\right);q\right)d\mu_2(\theta);\qquad(3)$$

$$\widetilde{\vartheta}_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln z;q\right)=-iq^{-1/4}\sqrt{z}\,\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln z;q\right)=$$

$$=A(1-z)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}z)(1-q^{2k}z^{-1});\quad\vartheta_0(\xi,q)=$$

$$=-iq^{1/4}e^{i\pi\xi}\vartheta_1\left(\xi+\frac{\tau}{2};q\right)=$$

$$=A\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k-1}z)(1-q^{2k-1}z^{-1}),$$

$$\xi=\frac{1}{2\pi i}\ln z,\qquad A=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}).$$

Для функции $\psi(z)$, отображающей кольцо на однолистную область, граница которой состоит из двух замкнутых выпуклых линий, получается представление

$$\psi(z)=C_1\int\exp\left\{-\frac{1}{\pi}R(z)\right\}dz+C_2.\qquad(4)$$

Дается также представление функций, у которых

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0.$$

В последнем параграфе автор устанавливает структурную формулу для функций, отображающих кольцо на однолистную двусвязную область, содержащую $z=\infty$, с границей из двух кусочно-гладких линий.

Автор отмечает, что частные случаи его формул, соответствующие ступенчатым $\mu_i(\vartheta)$, были установлены ранее (R. Thiry, H. Villat, H. И. Ахиезер).

С. Я. Хавинсон

692. Две теоремы о целых функциях. Боас (Two theorems on integral functions. Boas R. P., Jr.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 194—196 (англ.)

Пользуясь одним общим результатом Валирона о связи $n(r)$ (числа нулей целой функции $F(z)$ в круге $|z|<r$) и $M(r)$ (максимума ее модуля в том же круге), автор дает более простое доказательство теорем:

1) (Полиа). Если $F(z)$ — целая функция конечного нецелого порядка, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,n(r)/\ln M(r)>0.$$

2) (Шах). Если $F(z)$ — целая функция конечного порядка и род этой функции равен роду ее канонического произведения, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,n(r)\varphi(r)/\ln M(r)=\infty$$

для любой непрерывной неубывающей $\varphi(r)>0$, для которой

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}<\infty.$$

М. А. Евграфов

693. Целые функции с отрицательными нулями. Боас (Integral functions with negative zeros. Boas R. P., Jr.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 179—184 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка меньше 1 с вещественными отрицательными нулями, причем $f(0)=1$, $n(r)$ обозначает число нулей $f(z)$, не превышающих по модулю r. Как известно, условия

$$\ln f(r)\sim(A\pi\,\mathrm{cosec}\,\pi\rho)r^{\rho}\ (r\to+\infty,\ A>0,\ 0<\rho<1)\qquad(1)$$

и

$$n(r)\sim Ar^{\rho}\qquad(2)$$

эквивалентны (см. Valiron G., Ann. Fac. Univ. Toulouse, 1914, сер. 3, 5, 117—257). Палей и Винер, пользуясь методом тауберовых теорем, показали, что в случае $\rho=1/2$ условия (1) и (2) эквивалентны следующему условию:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R x^{-3/2}\log|f(-x)|\,dx=-\pi^2A\qquad(3)$$

(см. Paley R.E.A.C., Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934, стр. 70). Автор обобщает последний результат на случай произвольного ρ $(0<\rho<1)$ и доказывает, что условия (1) и (2) при этом эквивалентны следующему условию:

$$\int_0^r x^{-1-\sigma}\{\log|f(-x)|-\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi\sigma n(x)\}\,dx\sim$$

$$\sim\pi A(\rho-\sigma)^{-1}(\mathrm{ctg}\,\pi\rho-\mathrm{ctg}\,\pi\sigma)r^{\rho-\sigma},\qquad(4)$$

где σ — любое число, $0<\sigma<1$; при $\sigma=\rho$ условие (4) следует понимать так:

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r x^{-1-\rho}\{\log|f(-x)|-\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi\rho n(x)\}\,dx=$$

$$=-\pi^2A\,\mathrm{cosec}^2\pi\rho.\qquad(5)$$

В частности, из (5) при $\rho=1/2$ вытекает условие (3). Следует отметить, что автор пользуется лишь обычными методами теории функций комплексного переменного (вычетами).

Б. И. Коренблюм

694. Об одной теореме типа теоремы Полиа. Бибербах (Über einen Satz Pólyascher Art. Bieberbach Ludwig), Arch. Math., 1953, **4**, № 1, 23—27 (нем.)

Сформулирован следующий результат: Если целая функция $F(z)$ вместе со всеми своими производными принимает целые значения в точках $z=0,1,\ldots,m-1$ и удовлетворяет условию $|F(z)|<Ce^{\sigma|z|^m}$, $\sigma<1$, то $F(z)$ является многочленом.

Эта оценка не может быть улучшена, как показывает пример

$$F(z) = \exp[z(z-1)\ldots(z-m+1)].$$

Автор подробно останавливается на обосновании случая $m = 1$, который сам по себе очевиден. Доказательство в общем случае содержится в книге автора (Bieberbach L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, 1952, Basel). *М. А. Евграфов*

695. **Направления наибольшего роста произведения целых функций конечного порядка и среднего типа. Вильсон** (Directions of strongest growth of the product of integral functions of finite order and mean type. Wilson R.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 185—193 (англ.)

Направлением наибольшего роста целой функции $F(z)$ конечного порядка ρ и среднего типа k названо значение величины θ, при котором $h_F(\theta) = k$, где $h_F(\theta)$ — индикатор роста. Доказываются некоторые простые теоремы, относящиеся к направлению наибольшего роста произведения целых функций.

В частности:

Если $F(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ и $G(z) = \sum_0^\infty b_k z^k$ — целые функции конечного порядка ρ, то все направления наибольшего роста произведения $F(z)\,G(z)$ имеют вид $\theta = -\rho^{-1}\arg\gamma$, где $\gamma = \alpha + \beta$, α и β — особые точки функций

$$f^*(z) = \sum_0^\infty \Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right) a_k z^{-\frac{k}{\rho}-1},$$

$$g^*(z) = \sum_0^\infty \Gamma\left(\frac{k}{\rho}+1\right) b_k z^{-\frac{k}{\rho}-1}.$$

Б. Я. Левин

696. **Неизмеримые интерполяционные множества. (III). Теорема Метленда. Нобл** (Non-maeasurable interpolation sets (III). A theorem of B. J. Maitland. Noble M. E.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 13, 11—18 (англ.)

Уточняется следующая теорема Метленда (Maitland B. J., Quart. J. Math., 1944, **15**, 84—96):

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ и среднего типа k и $d < (\pi/2k\rho^2)^{1/2}$. Тогда существует такая последовательность ζ_n, что $|\zeta_n| \to \infty$ и $\lim |z|^{-\rho} \ln|f(z)| = k$, если $z \to \infty$ и находится в кружках $|z-\zeta_n| < d\,|\zeta_n|^{1-\rho/2}$.

Основной результат автора следующий:

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, среднего типа k, $d < (\pi/2k\rho^2)^{1/2}$, $\mu < k$, $\zeta(r) = re^{i\theta(r)}$ (θ — вещественная) и $E(f, k, \mu, d, \zeta)$ — множество тех значений r, при которых выполняется неравенство

$$\ln|f(z)| \geqslant \mu r^\rho$$

для всех z из круга $|z-\zeta(r)| < dr^{1-1/2\rho}$. Тогда для некоторой функции $\zeta(r)$ и некоторой постоянной $C(\rho) \geqslant \frac{e(\rho-1)}{\rho^2}$ верно неравенство

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{E \cap [0, R]\}}{R} = D^*E \geqslant$$

$$\geqslant C(\rho)\left(1 - \frac{2\rho^2 d^2 k}{\pi}\right)\min\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\rho^2 d^2 k}{\pi}\right), 1 - \frac{\mu}{k}\right\}.$$

Аналогичный результат в несколько иных терминах дается для случая $0 < \rho \leqslant 1$. Доказательство основано на следующей интерполяционной лемме:

Пусть $G(D^*, d^*, \eta, \rho)$ — множество нулей целой функции $\sigma_g(z)$, удовлетворяющей при любом $\varepsilon > 0$ и $R > R_\varepsilon$ неравенствам:

$$\ln|\sigma_g(z)| \leqslant (D^* + \varepsilon) r^\rho, \quad \ln|\sigma_g(z)| \geqslant (d^* - \varepsilon) r^\rho \text{ и}$$

$$\ln|\sigma_g'(z_n)| \geqslant (d^* - \varepsilon)\,|z_n|^\rho,$$

причем второе неравенство верно вне некоторого множества $e(R)$ кружков, с суммой радиусов не большей ηR, а третье — в нулях $\sigma_g(z)$. Тогда, если $f(z)$ — целая функция порядка ρ и среднего типа, $k < d^*(1+2\eta)^{-\rho}$ и $\beta = \overline{\lim}\,|z_n|^{-\rho}\ln|f(z_n)|$, то $k \leqslant \left(\beta\frac{d^*}{D^*} + D^* - \frac{d^*}{D^*}\right)(1+2\eta)^\rho$. Статья является продолжением работ автора (Noble M. E., (I) (II), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 713—740).

Б. Я. Левин

697. **Значения целой функции, представимой лакунарным рядом Дирихле. Сунье р-и-Балагер** (Values of entire functions represented by gap Dirichlet series. Sunyer i Balaguer F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 310—322 (англ.)

Доказываются две теоремы о том, что при некоторых условиях целая функция $f(s)$ ($s = \sigma + it$), представленная рядом Дирихле, в любой горизонтальной полосе определенной ширины принимает каждое (без исключения) значение и при том все значения одинаково часто.

Пусть $\sup_{-\infty<t<\infty} |f(\sigma+it)| = M(\sigma, f) < \infty$. Будем говорить, что $f(s)$ имеет порядки ρ и $\rho(\sigma)$ в смысле (R), если

$$\lim_{\sigma\to-\infty} \rho(\sigma) = \rho, \qquad \lim_{\sigma\to-\infty} \rho'(\sigma)\,\sigma = 0$$

и

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln M(\sigma, f)}{V(\sigma)} = 1 \qquad (V(\sigma) = e^{-\rho'(\sigma)\sigma}).$$

Первая теорема: Пусть функция

$$F(s) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty),$$

представленная рядом Дирихле, сходящимся во всей плоскости, имеет порядки ρ и $\rho(\sigma)$ в смысле (R): пусть Y — горизонтальная полоса ширины большей чем π/ρ; $n(\sigma, Y, F-a)$ — число нулей $f(s)$ в части $\sigma \leqslant R(s) \leqslant 0$ полосы Y; D — средняя верхняя плотность $\{\lambda_n\}$ $\left(D = \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{N(x)}{x}\,dx$, где $N(x)$ — наибольшее n такое, что $\lambda_n < x\right)$.

Тогда существует число Δ, зависящее только от Y, ρ и h, такое, что если $D<\Delta$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0$, то для каждого (без исключения) конечного значения a

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{n(\sigma, Y, F-a)}{V(\sigma)}\geqslant B_0>0,$$

где B_0 зависит только от ρ, Y и h.

Вторая теорема того же типа относится к функциям бесконечного порядка в смысле (R).

А. Ф. Леонтьев

698. О возрастании моментов функции, регулярной в угле. **Сан Хуан** (L'accroissement des moments d'une fonction holomorphe dans un angle. San Juan R.), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 20, 1941—1943 (франц.)

Если $f(z)$, $z=re^{i\theta}$, регулярна и ограничена в угле $|\theta|\leqslant\alpha\frac{\pi}{2}$ и для каждого θ, $|\theta|\leqslant\alpha\frac{\pi}{2}-\delta$ при любом $0<\delta<\alpha\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|\,r^n\,dr<\{C(\delta)\}^n\,\Gamma(\alpha' n+1),$$

где $C(\delta)$ не зависит от θ и n, а $\alpha'<\alpha$, то $f(z)\equiv 0$.

В. И. Левин

699. Общая теорема относительно роста голоморфных функций, не имеющих нулей в единичном круге, и новый критерий нормальности семейства голоморфных или мероморфных функций. **Сюн Цзин-лай** (Un théorème général relatif à la croissance des fonctions holomorphes et privées de zéros dans le cercle unité et un nouveau critère de normalité pour une famille de fonctions holomorphes ou méromophes. Hiong King-lai) C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 13, 1322—1324 (франц.)

Если $f(z)$ голоморфна и не имеет нулей в единичном круге, то или $m(r, f)<\ln^+|f(0)|+H$ или, положив $V(r, f)=m(r, f)+m(r, 1/f)$, получим при $r\geqslant r_0$

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<\frac{1}{(\rho-r)^2}[\alpha_k\ln^+|f(0)|+$$
$$+\beta_k\ln(\rho-r)^{-1}+\gamma_k\ln^+V(\rho, f)],$$

где H, α_k, β_k, γ_k — константы, зависящие только от k,

$$m(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

При помощи этой леммы устанавливается следующая теорема типа Шоттки:

Теорема I. Если $f(z)$ голоморфная в единичном круге функция конечного порядка λ, причем $f(z)\neq 0$ при $|z|<1$ и $f(0)=c_0\neq 1$, то при сколь угодно малом δ и r, $0<\delta\leqslant r<1$ имеет место неравенство

$$\ln M(r, f)<\frac{1}{(1-r)^s}[H\Omega(c_0, \delta)+K\ln|2(1-r)^{-1}|],$$

где $s=3$, если $\lambda<3$ и $s>\lambda+\varepsilon$ в противном случае. Здесь H и K — константы, а

$$\Omega(c_0, \delta)=\ln^+|c_0|+\ln^+|c_0^{-1}|+$$
$$+\ln^+|(c_0-1)^{-1}|-\ln\delta.$$
$$\left(M(r, f)=\max_{|z|=r}|f(z)|\right).$$

Из теоремы I выводятся два критерия нормальности семейства функций. Приведем один из них.

Теорема II. Семейство функций конечного порядка в единичном круге такое, что для любой $f(z)$ из этого семейства $f(z)\neq 0$ при $|z|<1$ и $f(0)\neq 1$, является нормальным.

В качестве аналога теоремы Ландау автор формулирует следующую теорему:

Теорема III. Если $f(z)=c_0+c_1z+\cdots$ $(c_0, c_1\neq 0)$ — функция конечного порядка в круге радиуса R, причем $f(z)\neq 0$ в этом круге и $c_0\neq 1$, то

$$|c_1|\,R<K\exp[H\Omega(c_0)],$$

где K и H — числовые константы и

$$\Omega(c_0)=\Omega(c_0, \delta)+\ln\delta.$$

Приведено неравенство, заменяющее теорему I в случае бесконечного порядка; из него также вытекают оба критерия нормальности. Упомянута возможность распространения этих критериев на случай конечно-связных областей и мероморфных функций. Все результаты приведены без доказательств.

При реферировании учтен список опечаток к этой работе (C. R. Acad. sci., 1953, **236**, № 15, 1516).

С. Я. Хавинсон

700. О голоморфных в единичном круге функциях, принимающих одно значение только p раз и имеющих одно исключительное значение в смысле Пикара—Бореля или в смысле Неванлинны. **Сюн Цзин-лай** (Sur les fonctions holomorphe dans le cercle unité ne prenant une valeur qu, p fois et admettant une valeur exceptionnelli au sens de Picard — Borel ou au sens de R. Nevanlinna. Hiong King-lai), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 17, 1628—1630 (франц.)

Заметка является продолжением предыдущей заметки автора (см. реф. 699). На этот раз рассматриваются функции, принимающие значение нуль не более чем в p точках и имеющие единицу своим исключительным значением. Относительно роста таких функций автор формулирует теорему A:

Пусть для функции

$$f(z)=c_0+c_hz^h+\ldots\ (c_0, c_h\neq 0\ \text{и}\ c_0\neq 1),$$

имеющей нули только в точках a_ν, $\nu=1, \ldots, p$, единица является исключительным значением в смысле Пикара — Бореля. Опишем вокруг a_ν кружки γ_ν радиуса δ_ν. Тогда при z, лежащих вне всех γ_ν и удовлетворяющих неравенству: $0<\delta\leqslant|z|\leqslant r<1$, где r таково, что $|a_\nu|\leqslant r$, $\nu=1, \ldots, p$ имеет место оценка:

$$\ln|f(z)|<\frac{1}{(1-r)^s}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu)+K\ln\frac{2}{1-r}\right],$$

где

$$\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) = \Omega(c_0) + \ln \delta^{-1} + \sum_\nu \ln \delta_\nu^{-1};$$

$$\Omega(c_0) = \ln^+ |c_0| + \ln^+ |c_0^{-1}| + \ln^+ |(c_0 - 1)^{-1}|;$$

здесь H и K — числовые константы, δ, δ_ν могут быть произвольно малы.

В теореме B та же оценка устанавливается, когда исключительное значение понимается в смысле Неванлинны с дефектом $\delta(1) \geqslant l > 0$.

Как и в предыдущей заметке, на основании теорем A и B формулируются новые критерии нормальности и квазинормальности семейства функций. Приведем последний критерий.

Теорема III. Всякое семейство голоморфных в единичном круге функций $f(z)$, обращающихся в нуль не более чем в p точках и имеющих единицу в качестве исключительного значения (в смысле Пикара—Бореля или Неванлинны), является квазинормальным порядка $q \leqslant p$ при условии, что $f(0) \neq 0,1$ для всех функций.

Как и в предыдущей заметке, автор формулирует также аналог теоремы Ландау.

С. Я. Хавинсон

701. О теории относительных дефектов функций, голоморфных в единичном круге; новый критерий нормальности и квазинормальности семейств. **Сюн Цзин-лай** (Sur la théorie des défauts relative aux fonctions holomorphes dans le cercle-unité; un nouveau critère de familles normales ou quasi normales. Hiong King-lai), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 20, 1929—1941 (франц.)

Автор развивает результаты двух своих предыдущих заметок (см. реф. 699 и 700).

Основная теорема работы такова:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и a_ν $(\nu = 1, \ldots, n\ (r,\ 0))$ — ее нули в круге радиуса $r < 1$. Пусть $f(z)$ имеет q дефектных значений α_λ $(\lambda = 1, \ldots, q)$, отличных от $f(0)$, причем сумма их дефектов не меньше числа $l > 1$. Опишем вокруг каждого нуля a_ν круг γ_ν произвольно малого радиуса δ_ν. Тогда в каждой точке z $(0 < \delta \leqslant |z| \leqslant r < 1)$, находящейся вне всех γ_ν, имеет место оценка:

$$\ln |f(z)| < (1 - r)^{-\delta} \left[H\Omega(f(0), \alpha_\lambda, \delta, \delta_\nu) + K \ln \frac{2}{1 - r} \right],$$

где δ произвольно мало; H и K — числовые константы и

$$\Omega = \Omega_0 + \ln \delta^{-1} + \Sigma \ln \delta_\nu^{-1};$$

$$\Omega_0 = \ln^+ |f(0)| + \ln^+ |f(0)|^{-1} + \Sigma \ln^+ |f(0) - \alpha_\lambda|^{-1}.$$

Эта теорема позволяет сформулировать несколько критериев нормальности и квазинормальности семейств функций. Приведем один из них: пусть дано семейство голоморфных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$:

$$f(z) = \Lambda + c_h z^h + \ldots \qquad (c_h \neq 0)$$

(Λ — одно и то же для всех функций). Если каждая функция этого семейства имеет счетное множество дефектных значений с суммой дефектов не меньшей $l > 1$, то семейство $\{f(z)\}$ нормально в круге $|z| < 1$.

Автор отмечает, что гипотезы $\Lambda \neq 0,1$ (или $f(0) \neq \neq 0,1$), принятые в двух его предыдущих заметках, излишни.

Указывается, что аналогичные теоремы верны, если заменить дефект $\delta(\alpha)$ числом $\theta(\alpha)$, введенным Неванлинной (см. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941, стр. 285). При этом в основной теореме Ω заменится на

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + \sum_\nu \ln \delta_\nu^{-1} + \sum_\mu \ln \delta_\mu'^{-1},$$

где δ_μ' радиус круга γ_μ', описанного вокруг нуля α'_μ производной функции $f'(z)$, лежащего на окружности $z = |r|$.

С. Я. Хавинсон

702. К теории мероморфных функций с ограниченной характеристикой. **Лехто** (Sur la théorie des fonctions méromorphes à caractéristique bornée. Lehto Olli), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 20, 1943—1945 (франц.)

Пусть $w = f(z)$ — отличная от постоянной мероморфная в единичном круге $|z| < 1$ функция, имеющая ограниченную характеристику, и пусть множество ее предельных значений $f(e^{i\varphi}) = \lim_{z \to e^{i\varphi}} f(z)$, существующее, как известно, почти для всех φ, принадлежит не пустому замкнутому множеству Γ. Тогда по аналогии с принципом Фрагмена — Линделёфа имеет место следующая альтернатива: $f(z)$ либо вовсе не принимает значений, лежащих вне Γ, либо принимает все значения вне Γ, исключая, быть может, множество емкости нуль (само Γ по теореме Неванлинны и Фростмана имеет положительную емкость). В первом случае для $r < 1$ и любых a имеет место неравенство

$$N\left(r, \frac{1}{f - a}\right) \leqslant \left(r, \frac{1}{\zeta - a}\right),$$

где N — функция, известная из теории распределения; $\zeta = \zeta(z)$ — функция, удовлетворяющая условию $\zeta(0) = f(0)$ и отображающая круг $|z| < 1$ на подобласть Γ, содержащую значения $f(z)$.

Во втором случае, если $f(0) \in \Gamma$, то, за исключением, быть может, множества значений a емкости нуль, имеет место неравенство

$$N\left(1, \frac{1}{f - a}\right) \geqslant g[a, f(0), C(\Gamma)],$$

где $g[a, f(0), C(\Gamma)]$ — функция Грина дополнения Γ с полюсом в точке $f(0)$. Это неравенство обращается в равенство, если $f(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на универсальную поверхность наложения $C(\Gamma)$; с другой стороны, для любого множества E емкости нуль, лежащего вне Γ, существует удовлетворяющая предыдущим условиям функция $f(z)$ такая, что

$$N\left(1, \frac{1}{f - a}\right) < g[a, f(0), C(\Gamma)]$$

для всех $a \in E$. Автор останавливается на случае,

когда $f(z)$ не принимает значений из Г. Доказательства отсутствуют. *Л. И. Волковыский*

703. Определение типа и свойств отображающей функции для одного класса двусвязных римановых поверхностей. Т е й л о р (Determination of the type and properties of the mapping function of a class of doubly-connected Riemann surfaces. T a y l o r H o w a r d E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 52—68 (англ.)

Поверхность F рассматриваемого класса определяется двумя бесконечными последовательностями действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем $b_{-1} < a_{-1} < 0 < a_1 < b_1$, $a_{2k-1} > a_{2k}, b_{2k-1} > a_{2k-1}$, $a_{2k} > b_{2k}$, $a_{-2k} > a_{-2k+1}$, $a_{-2k-1} > b_{-2k-1}$, $b_{-2k} > a_{-2k}$, $k \geqslant 1$.

F состоит из бесконечного числа листов $\ldots, S_{-k}, S_{-k+1}, \ldots, S_{-1}, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$, представляющих плоскости с разрезами: у S_j $(j = -1, \pm 2, \ldots)$ — от a_j до b_j и от a_{j-1} до b_{j-1}; у S_1 — от a_1 до b_1 и от a_{-1} до b_{-1}. S_j и S_{j+1} $(j \neq -1)$ соединяются вдоль разреза от a_j до b_j; S_{-1} и S_1 — вдоль разреза от a_{-1} до b_{-1}.

Доказывается, что F всегда конформно эквивалентна области $0 < |z| < \infty$ и что отображающая функция имеет вид

$$f(z) = \int_1^z f'(t)\, dt,$$

$$f'(z) = K \exp(\sigma_1 z + \sigma_2/z) \prod_{k=j}^{\infty} (1 - z/\alpha_k)(1 - z/\beta_k) \times$$

$$\times (1 - \alpha_{-k}/z)(1 - \beta_{-k}/z)(1 - z/\gamma_k)^{-2}(1 - \gamma_{-k}/z)^{-2},$$

где $K > 0$, $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — действительные числа, причем $\cdots < \beta_k < \gamma_k < \beta_{k-1} < \cdots < \beta_1 < \gamma_1 < \beta_{-1} < \gamma_{-1} < \cdots < \beta_{-k} < \gamma_{-k} < \cdots < 0 < \cdots < \alpha_{-k-1} < \alpha_{-k} < \cdots < \alpha_{-1} < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \cdots$; $\sum_{k=j}^{\infty} 1/\alpha_k < \infty$, $\sum_{k=j}^{\infty} 1/|\beta_k| < \infty$, $\sum_{k=j}^{\infty} 1/|\gamma_k| < \infty$, $\sum_{k=j}^{\infty} \alpha_{-k} < \infty$, $\sum_{k=j}^{\infty} |\beta_{-k}| < \infty$, $\sum_{k=j}^{\infty} |\gamma_{-k}| < \infty$; вычеты $f'(z)$ в полюсах равны нулю и σ_1, σ_2 неположительны. Доказательство основано на рассмотрении нормированных рациональных отображающих функций, соответствующих замкнутым поверхностям, получаемым соединением листов $S_{-n}, S_{-n+1}, \ldots, S_n, S_{n+1}$ и исключением разрезов, остающихся на крайних листах. Подобное исследование автор проводит сначала для класса односвязных римановых поверхностей, получаемых как и выше, но только из листов $S_1, S_2, \ldots$ без разреза от a_{-1} до b_{-1} у S_{-1}, доказывая, что все эти поверхности параболического типа и что отображающая функция для них имеет вид

$$f(z) = \int_0^1 e^{\delta t} \prod_{k=j}^{\infty} (1 - t/\alpha_k)(1 - t/\beta_k)(1 - t/\gamma_k)^{-2} dt,$$

где $\delta \leqslant 0$.

В работе имеет место также частичное обращение указанных теорем. *Л. И. Волковыский*

704. Теорема Морера для нескольких переменных. Б о х н е р (The theorem of Morera in several variables. B o c h n e r S a l o m o n), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, 34, 27—49 (англ.)

Излагается новое доказательство теоремы Морера для функций нескольких комплексных переменных. Прежде всего доказывается теорема:

Пусть функция $f = f(z^1, \ldots, z^k, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^k)$ непрерывна в области D пространства E_{2k} комплексных переменных $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, k$. Если

$$\int_{B_{p+q}} f\, dz^{\alpha_1} \ldots dz^{\alpha_p} d\bar{z}^{\beta_1} \ldots d\bar{z}^{\beta_q} = 0 \qquad (1)$$

для любого цикла B_{p+q} размерности $p+q$, где

$$1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \leqslant k,\ 1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_q \leqslant k \qquad (2)$$

— фиксированные индексы и

$$0 \leqslant p,\quad 0 \leqslant q,\quad 1 \leqslant p + q \leqslant 2k - 1, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = 0,\ \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_p,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\beta} = 0,\ \beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_q. \qquad (4)$$

Автор вводит понятие голоморфного цикла следующим образом. В z^j-плоскости берется одномерный цикл B^j_1, ограничивающий область B^j_2. Если произведение

$$B_{2k} = B^1_2 \times B^2_2 \times \ldots \times B^k_2 \qquad (5)$$

содержится в данной области D, то

$$B_k = B^1_1 \times B^2_1 \times \ldots \times B^k_1 \qquad (6)$$

называется простым произведением циклов; k-мерный цикл B_k в области D называется голоморфным, если он содержится в некоторой области $D' \subset D$, причем существует взаимно однозначное голоморфное отображение

$$z^j = \varphi_j(w^1, \ldots, w^k)$$

области D', при котором B_k переходит в простое произведение циклов в пространстве $(w^1, \ldots, w^k)$.

Используя понятие простого произведения циклов, автор доказывает теорему Морера:

Если функция f непрерывна в области D и

$$\int_{B_k} f\, dz^1 \ldots dz^k = 0$$

для всех голоморфных циклов B_k области D, то f является голоморфной функцией. *Ю. К. Солнцев*

705. Целые функции конечного порядка с заданными нулевыми поверхностями. Штолль (Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Stoll Wilhelm), Math. Z., 1953, 57, № 2, 211—237 (нем.)

Рассматриваются целая функция $f(\mathfrak{z})$ ($\mathfrak{z} = z_1, z_2, \ldots, z_n$) и следующие величины, характеризующие распределение ее a-точек в пространстве:

$$n(r, a) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{r_0}^{r} \int_{\mathfrak{N}_a} \nu(\mathfrak{z}, a)\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \quad (r_0 > 0), \quad (1)$$

$$N(r, a) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{t}\, dt, \quad (2)$$

$$m(r, a) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \times$$

$$\times \int_{|\mathfrak{z}|=r} \ln \frac{\sqrt{1+|f|^2}\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|}\, \partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}), \quad (3)$$

$$A(r) = \frac{1}{\pi V_{2n-2}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|\leqslant r} \frac{\partial f\, \partial \bar{f}}{(1+|f|^2)^2}\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}), \quad (4)$$

$$T(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t)}{t}\, df. \quad (5)$$

Здесь интеграл (1) берется по части поверхности $\mathfrak{N}_a$ (заключенной между гиперсферами радиусов r_0 и r с центром в начале координат), на которой $f(\mathfrak{z})$ принимает значение a, $\nu(\mathfrak{z}, a)$ — кратность a точки; $\partial v_{n-2}(\mathfrak{z})$ — евклидов элемент поверхности. В интеграле (3) $\partial v_{2n-1}(\mathfrak{z})$ — евклидов элемент поверхности гиперсферы размерности $2n-1$; интеграл (4) берется по некоторой аналитической поверхности $\mathfrak{N}$, лежащей в гипершаре $|\mathfrak{z}| \leqslant r$, $V_h(r)$—объем гипершара h измерений.

Как показал Кнезер (Kneser H., Jahresber. Dtsch. Math.—Ver., 1938, 48, 1—28)

$$T(r) = N(r, a) + m(r, a) - m(r_0, a); \quad (6)$$

далее, если в гипершаре $|\mathfrak{w}| \leqslant z_0$ функция $f(\mathfrak{w})$ не имеет нулей и полюсов, q — такое целое число, что $T(r)\, r^{-q-1} \to 0$ при $r \to \infty$, то

$$\ln f(\mathfrak{w}) = g(\mathfrak{w}) + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{0}^{r} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, l\left(\frac{(\mathfrak{w}/\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}/\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}), \quad (7)$$

где $g(\mathfrak{w})$ — многочлен степени не выше q, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) \cup \mathfrak{N}(\infty)$,

$$\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z}, 0) - \nu(\mathfrak{z}, \infty),$$

$$e(x, q) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ x^{n-1} \ln \left[(1-x) \exp \sum_{1}^{q} \frac{x^s}{s} \right] \right\}.$$

При $n = 1$ формула (7) дает представление Вейерштрасса функции одного переменного $f(z)$ в виде бесконечного произведения.

При помощи неубывающей функции $T(r)$ для мероморфной функции $f(\mathfrak{z})$ определяются порядок и тип роста и ее принадлежность к классу сходимости или расходимости. Все эти характеристики функции $f(\mathfrak{z})$ оказываются не зависящими от выбора начала координат. Для целой функции те же характеристики могут быть построены при помощи функции $M(r) = \max_{|\mathfrak{z}|\leqslant r} |f(\mathfrak{z})|$.

Автор строит величины $n(r)$, $N(r)$ (аналогичные величинам (1), (2)) для разбиения Кузена 2-го рода F всего пространства R^{2n} и находит для подобного разбиения «предельный показатель» ρ, равный нижней грани показателей μ, для которых интеграл $\frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{r_0}^{\infty} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2}$ сходится.

Тогда оказывается, что:

1) для каждого целого числа μ интегралы

$$\int_{r_0}^{\infty} N(r)\, r^{-\mu-1}\, dr, \qquad \int_{r_0}^{\infty} n(r)\, r^{-\mu-1}\, dr,$$

$$\frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{r_0}^{\infty} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2}$$

сходятся или расходятся одновременно;

2) порядок $N(r)$ совпадает с порядком $n(r)$; тип $N(r)$ совпадает с типом $n(r)$, если $\rho > 0$; класс $N(r)$ совпадает с классом $n(r)$, если $\rho > 0$.

Этот общий класс оказывается классом сходимости (соответственно расходимости), если $\frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{r_0}^{\infty} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-\rho}\, \partial\omega_{2n-2}$ сходится (соответственно расходится).

Далее автор доказывает следующую теорему:

Теорема. Пусть в пространстве R^{2n} задана замкнутая нуль-поверхность $\mathfrak{N}$, пусть $\nu(\mathfrak{z})$ — ее кратность, $\rho < \infty$ — ее предельный показатель; пусть, далее, $q+1$ — наименьшее целое число, для которого интеграл $\int_{r_0}^{\infty} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-q-1}\, \partial\omega_{2n-2}$ сходится. Предполагается, что поверхность целиком лежит вне гипершара $|\mathfrak{z}| \leqslant r_0$.

Тогда

1) Существует целая функция $h(\mathfrak{w})$, однозначно определенная следующими двумя требованиями: а) функция $h(\mathfrak{w})$ обращается в нуль на поверхности $\mathfrak{N}$ (и только на ней, с кратностью $\nu(\mathfrak{w})$); б) в гипершаре $|\mathfrak{w}| \leqslant r_0$

$$\ln h(\mathfrak{w}) = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left[\frac{(\mathfrak{w}/\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}/\mathfrak{z})}, q\right] \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z});$$

2) Если $\nu(z, 0; a)$ — кратность нуля z функции $h(z, a)$, то для всех y и $a \neq 0$:

$$h(ya) = \lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leqslant r} E(y/z, q)^{\nu(z,0;a)},$$

где $E(x, q) = (1-x)\exp\sum_1^q \frac{x^\nu}{\nu}$;

3) Порядок h совпадает с порядком $n(r,0) = \rho$; тип h совпадает с типом $n(r, 0)$, если $q < \rho \leqslant q+1$; класс h совпадает с классом $n(r,0)$, если $q < \rho < q+1$.

В конце работы переносятся на случай функций многих переменных результаты Вейля (Weyl H., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton university press, 1943), относящиеся к системам мероморфных функций одного переменного.

Б. А. Фукс

706. О множестве точек, служащих образами точки неопределенности при мероморфном отображении. Тимм (Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Thimm Walter), Math. Z., 1953, 57, № 4, 456—480 (нем.)

Изучаются мероморфные отображения вида $z_j = \frac{p_j(x_1, \ldots, x_n)}{q_j(x_1, \ldots, x_n)}$ $(j = 1, \ldots, k)$ в окрестности некоторой точки O (которая далее принимается за начало координат). Функции p_j и q_j $(j = 1, \ldots, k)$ комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$ предполагаются регулярными в окрестности точки O, причем $p_j(0) = q_j(0) = 0$ (таким образом, при $k = 1$ автор имеет дело с точкой неопределенности одной мероморфной функции). Предполагается, что рассматриваемые точки $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат некоторому фиксированному аналитическому многообразию Δ, определяемому уравнениями $\varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ и содержащему точку O (таким образом, предполагается, что функции $\varphi_\nu(x)$ регулярны в точке O и $\varphi_\nu(0) = 0$). Автор ограничивается рассмотрением случая, когда $|p_j| + |q_j|$ ни для какого j не обращается тождественно в нуль на каком-либо неприводимом аналитическом многообразии, входящем в состав Δ и содержащем точку O.

Точка $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ называется образом точки неопределенности $x^0 = (x_1, \ldots, x_n)$ при рассматриваемом отображении, если 1) хотя бы для одного j $p_j(x^0) = q_j(x^0) = 0$; 2) существует такая последовательность точек Δ $x^\mu \to x^0$, что $\frac{p_s(x^\mu)}{q_s(x^\mu)} \to \zeta_s$ $(s = 1, \ldots, k)$.

Более 50 лет назад в работе Отона (Autonne, Acta Math., 1897, 21, 249—264) было высказано утверждение, что множество образов точек неопределенности является алгебраическим многообразием. Однако доказательство Отона имело дефект, и обоснование этого утверждения отсутствовало до последнего времени. Автор реферируемой статьи доказывает справедливость предположения Отона, устанавливая следующую теорему.

Теорема. Существует система многочленов $x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$, (1) коэффициенты которых удовлетворяют некоторым алгебраическим уравнениям

$$A_\mu(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) = 0, \ \mu = 1, \ldots, M, \qquad (2)$$

такая, что каждый образ $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ точки неопределенности O, при рассматриваемом отображении, может быть получен следующим способом:

Надо подставить (1) в соотношения $z_j = \frac{p_j(x)}{q_j(x)}$. В результате получаются равенства $z_j = \frac{p_j'(t)}{q_j'(t)}$ $(j = 1, \ldots, k)$, где функции $p_j'(t)$ и $q_j'(t)$ ни для какого j не оказываются одновременно тождественно равными нулю. Пусть при $p_j'(t) \not\equiv 0$, $q_j'(t) \not\equiv 0$:

$$p_j'(t) = t^{\mu_j}\left[c^{(j)}_{\mu_j}(a_{11}, \ldots, a_{nr}) + t c^{(j)}_{\mu_j+1} + \ldots\right], \quad (c^{(j)}_{\mu_j} \not\equiv 0,),$$

$$q_j'(t) = t^{\nu_j}\left[d^{(j)}_{\nu_j}(a_{11}, \ldots, a_{nr}) + t d^{(j)}_{\nu_j+1} + \ldots\right], \quad (d^{(j)}_{\nu_j} \not\equiv 0).$$

Тогда

$$\zeta_j = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_j > \nu_j \text{ или если } p_j'(t) \equiv 0, \\ \dfrac{c^{(j)}_{\mu_j}(a_{11}, \ldots, a_{nr})}{d^{(j)}_{\mu_j}(a_{11}, \ldots, a_{nr})}, \text{ если } \mu_j = \nu_j, \\ \infty, \text{ если } \mu_j < \nu_j \text{ или если } q_j'(t) \equiv 0, \end{cases}$$

и, следовательно, множество образов точки неопределенности заполняет некоторое алгебраическое многообразие.

Б. А. Фукс

707. Полюсы ε-моногенных функций. Ламбин Н. В., Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 7—13

Указывается ряд свойств линий уровня действительной и мнимой частей функций $w_1 = \tau_1 u - i\sigma_1 v$, $w_2 = \tau_2 u + i\sigma_2 v$, где $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ — коэффициенты, а (u, v) — решение линейной системы уравнений с частными производными

$$\tau_1(y)\, u_x = \sigma_1(x)\, v_y, \ \tau_2(y)\, v_x = -\sigma_2(x)\, u_y, \qquad (1)$$

в окрестности полюса. Эти свойства являются распространением известных свойств аналитических функций.

Замечание референта. Функции $u = 1 + e^{x-y}$, $v = x + y + 1$ удовлетворяют системе (1), в которой $\sigma_1 = e^x$, $\sigma_2 = e^{-x}$, $\tau_1 = e^y$, $\tau_2 = e^{-y}$. Якобиан

$$\frac{\partial(\tau_1 u, -\sigma_1 v)}{\partial(x, y)} = e^x\left[(x + y + 2)\, e^y - e^x\right]$$

обращается в нуль на логарифмике $x + y + 2 = e^{x-y}$, меняя там знак. Этот пример показывает, что семейство линий уровня функции w_1 не является топологически эквивалентным семейству линий уровня аналитической функции, вопреки одному из утверждений автора.

Б. В. Шабат

708. Приведение осесимметричной магнитной задачи к нахождению ε-моногенных функций.

Ламбин Н. В., Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 14—17

Приводится известное замечание о том, что безвихревое соленоидальное осесимметричное векторное поле в цилиндрических координатах описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, являющейся частным случаем системы, определяющей Σ-моногенные функции Берса и Джелбарта. Указываются два (также известных) частных решения этой системы. *Б. В. Шабат*

709. Общее представление функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле С. Л. Соболева, и проблема примитивных. Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 5, 773—775

Пусть функция $u(x, y)$ суммируема в области T и $\iint\limits_T |u(x, y)|\,dT < \infty$. Автор, следуя С. Л. Соболеву, обобщает классическое понятие формальных производных и определяет $\partial u/\partial \bar{z} = \omega(z)$ и $\partial u/\partial z = \chi(z)$ как такие суммируемые в T функции, которые для любой функции $v(x, y)$ с непрерывными в T частными производными удовлетворяют соотношениям:

$$\iint\limits_T \omega v\,dT + \iint\limits_T u\frac{\partial v}{\partial z}\,dT = 0;$$

$$\iint\limits_T \chi v\,dT + \iint\limits_T u\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\,dT = 0.$$

Если $\partial u/\partial \bar{z} \equiv 0$ (соотв. $\partial u/\partial z \equiv 0$) то $u(z)$ (соотв. $\overline{u(z)}$) оказывается аналитической функцией. Для дифференцируемых относительно $\bar{z}$ функций $u(z)$ устанавливается представление

$$u(z) = f(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_T \frac{\omega(t)}{t - z}\,dT_t,$$

где $f(z)$ — аналитическая в T функция. Полученное представление решает задачу о $\bar{z}$-примитивных и имеет некоторые другие следствия. В частности, показывается, что введенное понятие производной обобщает понятие производной Д. Помпейю. *Б. В. Шабат*

710. Парааналитические функции n измерений. Фреше (Les fonctions «para-analytiques» à n dimensions. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 19, 1832—1834 (франц.)

Автор называет систему гиперкомплексных чисел n измерений

$$v = \sum_1^n x_i e_i$$

паракомплексной, если умножение в ней обладает свойствами коммутативности и ассоциативности и если в ней существует главная единица.

Паракомплексная функция, заданная в этой системе,

$$V = F(v),$$

где

$$V = \sum_1^n X_i e_i,$$

имеет в точке $v = v_0$ производную $V' = F'(v_0)$, если в этой точке она дифференцируема (т. е. $dF = \sum\limits_1^n (dF_i)\,e_i$), и выполнено равенство

$$dF = V'.dv \quad (\equiv dv.V').$$

Функция V называется парааналитической в точке $v = v_0$, если она в окрестности этой точки 1) неограниченно дифференцируема и 2) имеет производную.

При таких определениях (как утверждает автор) оказывается, что в окрестности точки $v = v_0$ производная от парааналитической функции является в свою очередь парааналитической. *В. Л. Гончаров*

711 К. Введение в теорию функций комплексного переменного. Трон (Introduction to the theory of functions of a complex variable. Thron Wolfgang), Science, 1953, **117**, № 3036, 17 (англ.)

712 Д. Граничная задача Газемана для нескольких неизвестных функций и системы сингулярных интегральных уравнений. Чакветадзе С. С. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Телавский гос. пед. ин-т, Тбилиси, 1953

См. также 532, 534, 540, 541, 578, 579, 647, 654, 664, 673, 731, 739 К, 747, 754, 772, 796, 797, 839, 871, 882, 900, 918, 919

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

713. Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений. Викторовский Е. Е., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 4, 593—596

Рассматривается система уравнений

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

где $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ измеримы в некоторой $(n+1)$-мерной области G. Совокупность n абсолютно непрерывных функций $u_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется обобщенным решением системы (1) на сегменте $[x_0, x_0 + \alpha]$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого множества N, имеющего $(n+1)$-мерную меру нуль, существует n^2 функций $\psi_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, измеримых на $[x_0, x_0 + \alpha]$ и таких, что

1) $f_i(y, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x))$ суммируемы на $[x_0, x_0+\alpha]$;

2) $|u_i(x) - \psi_{ij}(x)| < \varepsilon$ на $[x_0, x_0+\alpha]$;

3) $|u_i(x) - y_{i0} - \int_{x_0}^{x} f_i(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x))\,dx| < \varepsilon$ на $[x_0, x_0+\alpha]$;

4) $(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x)) \overline{\in} N$ почти для всех $x \in X$.

Доказывается, что если функция

$$M(x) = \max_i \operatorname{vrai}\max_y |f_j(x, y)|$$

суммируема и если для некоторого $\gamma > 0$ область

$$P\{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\alpha;\ y_{i0} - \int_{x_0}^{x} [M(x)+\gamma]\,dx \leqslant y_i \leqslant y_{i0} + \int_{x_0}^{x} [M(x)+\gamma]\,dx\},$$

целиком лежит в G, то существует по крайней мере одно обобщенное решение с начальной точкой (x_0, y_0), определенное на $[x_0, x_0+\alpha]$. Для нахождения обобщенных решений автором указывается регулярный процесс. Если этот процесс применить в случае одного уравнения и предположить, что выполнено условие Каратеодори, то можно получить конструктивный метод построения максимального и минимального решений путем приближений сверху и снизу. Обобщенные решения, как утверждает автор, обладают многими свойствами обычных решений. В частности, пересечение воронки обобщенных решений, выходящих из одной точки, с плоскостью $x = x'$ дает континуум. *В. В. Немыцкий*

714. Теорема единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих гладкие функции. Маркус (A uniqueness theorem for ordinary differential equations involving smooth functions. Markus L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 88 (англ.)

Показывается, что при помощи одной теоремы Зигмунда и критерия Осгуда может быть легко доказана следующая теорема.

Обозначим через S дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и допустим, что $f(x, y)$ непрерывна в некоторой плоской области R и, кроме того, удовлетворяет следующему условию: для каждой точки $(x_0, y_0) \in R$ существует такая окрестность $N(x_0, y_0) \subset R$ и такая константа $k > 0$, что неравенство $|f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)| \leqslant kh$ имеет место при $(x, y) \in N(x_0, y_0)$ и всех достаточно малых положительных h. Тогда существует единственное решение $y(x, x_0, y_0)$ уравнения S такое, что $y(x_0; x_0, y_0) = y_0$ и $\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x}$ определена и непрерывна в некотором открытом множестве трехмерного пространства. *В. В. Немыцкий*

715. К изложению линейных дифференциальных уравнений во втузах. Эзрохи И. А., Эзрохи Т. Г., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 2 (54), 157—158

Показывается, что дифференциальное уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ интегрируется в квадратурах, если соответствующее характеристическое уравнение $r^2 + p(x)r + q(x) = 0$ имеет по крайней мере один постоянный корень. *Б. П. Демидович*

716. Понижение порядка нелинейных дифференциальных уравнений, встречающихся в механике. Джонс (On reducible non-linear differential equations occurring in mechanics. Jones C. W.), Proc. Roy. Soc., 1953, **A 217**, № 1130, 327—343 (англ.)

Исследуются свойства решений обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, к которым приводят некоторые задачи астрофизики, внутренней баллистики и теории пограничного слоя.

В § 1 дается подробная классификация особых точек уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{1}$$

являющегося частным случаем уравнения, исследованного впервые Пуанкаре. Это уравнение имеет семь особых точек.

В следующих двух параграфах нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка при помощи подходящей замены переменных сводятся к уравнению первого порядка указанного типа, затем проведенные в § 1 классификация особых точек и исследование поведения интегральных кривых уравнений (1) применяются для качественного исследования решений уравнения второго порядка.

В § 2 рассматривается уравнение Эмдена

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0, \tag{2}$$

используемое в теории внутренней структуры звезд. Это уравнение при помощи замены переменных

$$X = \frac{xy'}{y}, \qquad Y = \frac{xy^n}{y'}$$

автор сводит к уравнению (1) и затем дает подробную качественную характеристику решений уравнения (2).

В § 3 приводится вывод уравнения движения пистона внутри камеры под влиянием давления газа, вводимого в нее. Это уравнение имеет вид:

$$yy'' + ay'^2 + by = cx. \tag{3}$$

Заменой переменных

$$X = \frac{xy'}{y}, \quad Y = \frac{x^2}{yy'}, \quad Z = \frac{x}{y'}$$

порядок этого уравнения понижается, и оно сводится к системе уравнений:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X}\,\frac{2 + (a-1)X - cY + bZ}{1 - (a+1)X + cY - bZ}, \qquad \frac{dZ}{dX} = \frac{Z}{X}\,\frac{1 + aX - cY + bZ}{1 - (a+1)X + cY - bZ}. \tag{4}$$

В случае $b = 0$ первое уравнение системы есть уравнение типа (1). Далее показывается, что уравнение Блазиуса

$$f''' + ff'' = 0, \qquad (5)$$

встречающееся в теории пограничного слоя и полученное при исследовании обтекания потоком жидкости плоской пластинки, с граничными условиями $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 2$ при помощи замены переменных $f' = x$, $x\frac{dx}{df} = y$ сводится к уравнению

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + x = 0 \qquad (6)$$

с граничными условиями $x = 0$, $y' = 0$; $x = 2$, $y = 0$. Уравнение (6) является частным случаем уравнения (3) ($a = b = 0$, $c = -1$) и, следовательно, может быть сведено к уравнению

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X}\,\frac{X - Y - 2}{X + Y - 1},$$

т. е. к уравнению типа (1).

Статья имеет описательный характер и не содержит никаких доказательств. *Ю. К. Солнцев*

717. Дифференциальное уравнение Бернулли. Б а к л и (The Bernoulli differential equation. B u c k l e y A.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 5, 325 (англ.)

718. Приводимость линейных дифференциальных и разностных уравнений. Ф о р т (Reducibility of linear differential and difference equations. F o r t T o m l i n s o n), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 156—163 (англ.)

По определению, уравнение с вещественными непрерывными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0 \quad (a < x < b)$$

является приводимым порядка $j < n$ на интервале (a, b), если некоторая совокупность j решений этого уравнения образует фундаментальную систему решений какого-либо другого уравнения того же вида (при тех же предположениях о коэффициентах); при этом интервал можно считать также частично или полностью замкнутым. Некоторые из критериев приводимости непосредственно следуют из общеизвестного условия того, чтобы заданная система функций могла быть фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами. Особо разбираются уравнения 3-го порядка; приведем типичный результат: если функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ непрерывны на (a, b), то для того чтобы уравнение $y''' + p_1(x)\,y'' + p_2(x)\,y' + p_3(x)\,y = 0$ было приводимым порядка 2 на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы уравнение $z''' + 2p_1(x)\,z'' + [p_1'(x) + p_2(x) + \{p_1(x)\}^2]\,z' + [p_2'(x) + p_1(x)p_2(x) - p_3(x)]\,z = 0$ было приводимым порядка 1 на том же интервале. Приводятся также примеры уравнений 3-го порядка, не являющихся приводимыми порядка 1 (соответственно порядка 2) ни на каком достаточно длинном интервале; этого не может быть для уравнений с постоянными коэффициентами. Все рассуждения весьма элементарны. Что касается разностных уравнений, то излагаются только определение приводимости и некоторые общие соображения.

Замечания референта. Заключение, сделанное на стр. 159, строки 19—17 снизу, не обосновано; однако иным способом (рассмотрением неравенства $1{,}1 \pm \pm k\pi/2 \pm A \sin\alpha > 0$) можно доказать, что $y(x)$ имеет корни на каждом отрезке длины 6π. На стр. 161, строки 5 сверху и 11 снизу, перед $\{p_1(x)\}^2$ должен стоять $+$. В условии теоремы 10 неравенство можно считать нестрогим. Утверждение на стр. 163, строки 9—7 снизу, ошибочно: на примерах легко убедиться в том, что оба высказанные свойства уравнения (14) могут быть подчинены любой из четырех логически возможных связей. На стр. 163, строка 4 сверху, должно быть $P_{1m}(i)$ вместо $P_{1m}(x)$. *А. Д. Мышкис*

719. Применение теории систем дифференциальных уравнений к сложным неоднородным линиям передачи. С т е р н б е р г, К а у ф м а н (Applications of the theory of systems of differential equations to multiple non-uniform transmission lines: S t e r n b e r g R. L., K a u f m a n H.), J. Math. and Phys., 1953, 31, № 4, 244—252 (англ.)

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'(x) = -Y(x)\,v(x), \quad v'(x) = -Z(x)\,u(x), \qquad (1)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные одноколонные матрицы n-го порядка, а $Y(x)$ и $Z(x)$ — данные симметричные квадратные матрицы того же порядка с комплексными элементами, непрерывно зависящими от x; $a \leqslant x \leqslant b$ (или $a \leqslant x < \infty$). Эта система появляется, если решение системы телеграфных уравнений $-e_x' = R(x)i + L(x)i_t'$, $-i_x' = G(x)e + C(x)e_t'$ искать в виде $i(x,t) = u(x)\exp j\omega t$, $e(x,t) = v(x)\exp j\omega t$ ($j^2 = -1$; R, L, G и C — квадратные матрицы, i и e — одноколонные матрицы n-го порядка). Случай, когда матрицы Y и Z постоянны, рассмотрел Райс (Rice S. O., Bell System. Techn. J., 1941, 20, 131—178; см. также Бразма Н. А., Риекстыньш Э. Я., Уч. зап. Латвийского гос. ун-та, 1952, 6; там же см. дальнейшие ссылки). В реферируемой работе показано, как получить элементарным образом решение начальной задачи (задается $u(a)$ и $v(a)$) для системы (1), если известно симметричное матричное решение уравнения

$$H'(x) - H(x)\,Z(x)\,H(x) + Y(x) = 0, \qquad (2)$$

а также симметричное матричное решение уравнения

$$V'(x) = -Z(x)\,H(x)\,V(x), \qquad (3)$$

причем $V(a)$ совпадает с единичной матрицей. Явное решение системы (1) получается только тогда, когда Y и Z постоянны, т. е. в случае, разобранном раньше; однако для изучения свойств решений уравнений (2) и (3) могут быть применены результаты других работ, например Рида (Reid W. T., Amer. J. Math., 1946, 68, 237—246). В заключение для случая, когда $Y(x)$ и $Z(x)$ представляют собой произведение вещественных положительно определенных матриц на j, приводятся различные условия того, что при $a \leqslant x \leqslant b$ ни для какого нетривиального решения $v(x)$ не обращается дважды в 0-вектор (или при $a \leqslant x < \infty$ ни для какого нетривиального решения $v(x)$ не обращается в 0-вектор при как угодно

больших x). Эти условия получаются в результате перефразировки предложений, ранее доказанных Стернбергом (Duke Math. J., 1952, **19**, № 2, 311—322).

Замечание референта. В конце стр. 247 требование симметричности H_0 и K_0 излишне; то же относится к невырожденности H_0 в начале стр. 248. В середине стр. 248 равенство $d = 0$ обосновано недостаточно. На стр. 249 не оговорено, что ω вещественно и положительно. *А. Д. Мышкис*

720. Операционный анализ динамики уличного движения. Пайпс (An operational analysis of traffic dynamics. Pipes Louis A.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 3, 274—281 (англ.)

Рассматривается схематизация совокупности идущих друг за другом автомобилей, причем постулируется, что для обеспечения безопасности движения водитель каждой автомашины (кроме первой) поддерживает скорость, линейно зависящую от расстояния его машины до предшествующей. Требуется определить скорости и ускорения каждой машины при заданном законе движения первой. Математически эта задача приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T\dot{v}_{k+1} + v_{k+1} = v_k \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

($v_k(t)$ — скорость k-ой машины; T — константа, в данной работе приближенно принимаемая из некоторых соображений равной 1 сек.) при заданных $v_k(0)$. Решение легко получается при помощи операционного метода, в общем случае в виде интеграла, а в некоторых конкретных случаях (движение с места по простым законам, внезапная остановка после равномерного движения и т. д.) эффективно, через неполную Г-функцию от натурального аргумента, т. е. через комбинацию степенных и. экспоненциальных функций. Приведены графики и таблица значений неполной Г-функции от натурального аргумента, указана простая схема для электрического моделирования. Автор отмечает, что принятый постулат существенно отличается от реальных условий, однако надеется, что развитие аналогичных соображений может привести к эффективным рекомендациям.

Имеются ссылки на другие работы в этом направлении.

Замечания референта. На фиг.1 должно быть n вместо N. $u^{(k-1)}$ означает u в степени $k-1$. В формуле (3.6) должно быть $V_1(p)$ вместо $V_{1(p)}$. В формуле (3.13) пропущен знак равенства после $g_2(p)$. В § III ссылки должны быть сделаны на формулу (3.6) вместо (3.7) (3 раза), на формулу (3.14) вместо (3.15). На фиг. 5 должно быть T_0 вместо t_0. В §§ IV и VI ускорения легче вычислять при помощи дифференцирования выражения для скорости, а не независимо. В формуле (7.2) должно быть V_{k+1} вместо v_{k+1}. Формулы (8.4) и (9.6) упростятся, если воспользоваться тем, что $\Phi_k(t) + \Phi_{k-1}(t) + \cdots + \Phi_1(t) = 1 - G_k(t)$. В формуле (9.5) между $(p+1)^{-k}$ и $(p+1)^{-1}$ должно быть $+\cdots+$, а не $+$. *А. Д. Мышкис*

721. Три достаточных условия ограниченности решений линейного уравнения второго порядка. Семенов Н. З., Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 38—40

Рассматривается уравнение

$$y'' + \omega^2(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где $\omega(x)$ — положительная функция, дифференцируемая при $0 \leqslant x < +\infty$. На основе представления решения

$$y = Ce^{-\int \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \cos^2[x\omega(x)+\eta(x)]\,dx} \cdot \sin[x\omega(x)+\eta(x)],$$

где C — постоянная и $\eta = \eta(x)$ — функция, определяемая из уравнения

$$\omega(x)[\eta'(x) + x\omega(x)] = \frac{1}{2}\omega'(x)\sin 2[x\omega(x) + \eta(x)],$$

формулируются следующие достаточные условия ограниченности на интервале $(0, +\infty)$ решений уравнения (1):

1) $\omega'(x) \geqslant 0$,

2) $\int_a^{+\infty} |\omega'(\xi)| / \omega(\xi)\, d\xi < +\infty$,

где a — произвольное положительное число и

3) $\left| \int_E \omega'(\xi) / \omega(\xi)\, d\xi \right| < +\infty$,

где E — множество всех положительных интервалов $e = \{\omega'(x) < 0\}$.

Из них условие 1) общеизвестно (см. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд-во иностр. лит-ры, 1950, стр. 199 и Sansone G., Equazioni differenziali nel campo reale, 1949, Bologna, ч. 2, гл. VII, § 4, 25—71); достаточность условия 2) для ограниченности решения $y = y(x)$ вместе с его производной $y'(x)$ при наличии усиленного неравенства $\omega(x) \geqslant \alpha > 0$, где α — постоянная, доказана Каччиопполи (Caccioppoli R., Atti Accad. naz. Lincei Mem. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1930 (VIII), 2 (3), 251—254). *Б. П. Демидович*

722. О производных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Хартман (On the derivatives of solutions of linear, second order, ordinary differential equations. Hartman Philip), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 173—177 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q(t)\, y = 0 \tag{1}$$

с непрерывным коэффициентом $q(t)$, $0 \leqslant t < \infty$. Доказаны следующие теоремы:

1. Пусть $Q = Q(t) > 0$ — неубывающая функция и

$$q \leqslant Q. \tag{2}$$

Пусть $y = y(t)$ — решение уравнения (1) и

$$m(t) = \max |y(\tau)| \text{ для}$$

$$|t - u| \leqslant 2 / Q^{1/2}[t + 2 / Q^{1/2}(t)]. \tag{3}$$

Тогда при $t \geqslant 2 / Q^{1/2}(0)$ справедлива оценка

$$|y'(t)| \leqslant 2Q^{1/2}[t + 2 / Q^{1/2}(t)]\, m(t).$$

2. Пусть q и Q имеют тот же самый смысл, что и в предыдущей теореме, и

$$\int^{\infty} \frac{dt}{Q(t)} = \infty.$$

Пусть уравнение (1) имеет решение, ограниченное при $t \to \infty$. Тогда все решения уравнения (1), линейно независимые от $y(t)$, не принадлежат $L_2(0, \infty)$. В частности, если все решения уравнения (1) ограничены (например, q положительна и не убывает), то ни одно решение уравнения (1) не может принадлежать $L_2(0, \infty)$.

3. Положим $q^+ = q^+(t) = \max(0, q(t))$. Пусть при $t \to \infty$

$$\int_0^t q^+(s)\, ds = O(t^2).$$

Пусть уравнение (1) имеет ограниченное при $t \to \infty$ решение. Тогда справедливо заключение теоремы 2.

В последней теореме содержится, в частности, результат Фишеля (Fischel B., J. London Math. Soc., 1952, 27, 175—179).

Работа содержит ссылки на ряд предыдущих работ Хартмана и Хартмана и Винтнера, а также на работу Сиерса (Sears D. B., Canad. J. Math., 1950, 2, 314—325). *Б. М. Левитан*

723. Периодические решения одного дифференциального уравнения второго порядка. Де Кастро (Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine. De Castro A.), Boll. Unione mat., ital., 1953, сер. 3, 8, № 1, 26—29 (итал.)

Доказывается существование периодического решения уравнения $\ddot{x} + (x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ или системы уравнений $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -f(x, v)v - g(x)$, если:

1) $f(x, v)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям Липшица в любой ограниченной области;

2) $f(0, 0) < 0$;

3) $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$;

4) $|g(x)| + f(x, v)|v| > \varepsilon > 0$ при $|x| > x_0$;

(замечание референта: условие 4 следует рассматривать только при $xv \geqslant 0$);

5) выполняется одно из следующих условий:

а) $f(x, v) + f(x, -v) \geqslant 0$ при $|x| + |v| \geqslant R$,

б) существуют числа a, b, $b \geqslant a > 0$, такие, что $f(x, v) + f(x, -v) \geqslant 0$ для $|x| \geqslant 0$ и произвольного v и, кроме того, $\int_{-a}^{b} f(x, v)\, dx \geqslant \alpha > 0$ при произвольной функции $v(x)$, $|v(x)| > N$ (N произвольно велико).

При соответствующем видоизменении условия 4 (вместо 4 можно потребовать, чтобы $f(x, v) \geqslant 0$, когда $|x| > x_0$ и $xv \geqslant 0$ и $\int^{+\infty} g(x)\, dx = \infty$) теорема автора с условием 5) в форме б) окажется обобщением результата А. В. Драгилева (Прикл. математика и механика, 1952, 16, № 1, 85—88).

В связи с методом автора — использование ограничений на $f(x, v)$ типа симметрии относительно оси x — можно упомянуть работу А. Ф. Филиппова (Мат. сб., 1952, 30 (72) : 1, 171—180), где используются условия типа симметрии относительно оси v. *А. В. Драгилев*

724. Критерий ограниченности решений системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Бурдина В. И., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 3, 329—332

Рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x, \qquad (1)$$

где $P(t) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ — периодическая матрица периода ω. Это уравнение записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = IHx, \quad \text{где } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}.$$

Вводятся обозначения $\widetilde{H} = {}^1/_2 (H + H^*)$, где H^* — транспонированная к H матрица. Пусть, далее, $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $\widetilde{H}(t)$; наконец, обозначим через $2\mu_0$ среднее значение следа матрицы $P(t)$

$$2\mu_0 = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \operatorname{spur} P(\tau)\, d\tau.$$

В реферируемой заметке формулируется следующая теорема: Если хотя бы для одного $k = 0, \pm 1, \ldots$ и хотя бы для одного β, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, имеют место неравенства

$$k\pi - \int_0^{\omega} h_{\min}(\tau)\, d\tau \leqslant \arccos \frac{1 - \operatorname{ch} \mu_0\omega \cdot \cos\beta}{\operatorname{ch} \mu_0\omega - \cos\beta};$$

$$\int_0^{\omega} h_{\max}(\tau)\, d\tau - k\pi \leqslant \arccos \frac{1 + \operatorname{ch} \mu_0\omega \cdot \cos\beta}{\operatorname{ch} \mu_0\omega + \cos\beta},$$

то все решения системы (1) ограничены при $t \to +\infty$. Эта теорема представляет собой обобщение некоторых результатов В. А. Якубовича (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 2, 221—224). Аналогичные критерии могут быть выведены из исследования М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 2, 189—192). *В. В. Немыцкий*

725. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений $2n$-го порядка. Оби (Periodic solutions of nonlinear differential equations of order $2n$. Obi Chike), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 163—171 (англ.)

Исследуется вопрос о существовании периодических решений у системы вида:

$$\ddot{x}_r + \chi_r(x_r, \dot{x}_r^2) = k_{2r-1} f_{2r-1}(x_r, \dot{x}_r^2)\,\dot{x}_r + k_{2r} f_{2r}(x_r, \dot{x}_r^2)\,x_r + F_r(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon, t)$$

$$(r = 1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Здесь: 1) $\chi_r(x_r, \dot{x}_r^2)$, $f_{2r-1}(x_r, \dot{x}_r^2)$, $f_{2r}(x_r, \dot{x}_r^2)$,

$F_r(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon, t)$—аналитические функции своих аргументов; 2) $F_r \equiv 0$ при $\varepsilon = 0$; 3) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ и $k = (k_1, \ldots, k_{2n})$ — независимые малые параметры; 4) функции F_r либо совсем не зависят от t, либо являются периодическими функциями t периода 2π; 5) система

$$\ddot{x}_{r0} + \chi_r(x_{r0}, \dot{x}_{r0}^2) = 0$$

имеет не сводящееся к константам аналитическое решение $x_{r0} = x_{r0}(t, \alpha_r, \beta_r)$, для которого $x_{r0}(0, \alpha_r, \beta_r) - \alpha_r = \dot{x}_{r0}(0, \alpha_r, \beta_r) - \beta_r = 0$, и каждая из функций x_{r0} в этом решении является периодической относительно t с периодом $\Omega_r = \Omega_r(\alpha_r, \beta_r)$.

Показывается, что существуют такие функции $\xi_s(\alpha, \beta, \varepsilon)$ $(s = 1, \ldots, 2n)$ от $2n + m$ аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, аналитические относительно этих переменных вблизи $\varepsilon = 0$, что решение $x_r = x_r(t, \alpha, \beta, k, \varepsilon)$ полной системы уравнений (1) с начальными условиями $x_r - \alpha_r = \dot{x}_r - \beta_r = 0$ при $t = 0$ имеет период $2m\pi$, если начальные значения и параметры удовлетворяют уравнениям:

$$k_s = \xi_s(\alpha, \beta, \varepsilon) \qquad (s = 1, \ldots, 2n),$$

$$\Omega_r(\alpha_r, \beta_r) = \frac{2q_r\pi}{p_r} \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

При этом $x_r \equiv x_{r0}$ при $\varepsilon = k = 0$ и $\xi_s = 0$ при $\varepsilon = 0$. Здесь q_r / p_r — несократимая рациональная дробь и m — произвольное общее кратное чисел $q_1, \ldots, q_n$ (функции ξ_s зависят от взятого значения m).

Необходимо отметить, что утверждение автора о том, что системы (1) охватывают как частный случай системы, близкие к ляпуновским, неверно.

И. Г. Малкин

726. **Периодические решения системы дифференциальных уравнений. Антосевич** (Forced periodic solutions of systems of differential equations. Antosiewicz H. A.), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 314—317 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании периодических решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + p(x, t) + q(x, t, k). \qquad (1)$$

Здесь x — вектор n-мерного пространства E_x с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum x_s^2}$; $A(t)$ — непрерывная периодическая матрица периода 1; $p(x,t)$, $q(x, t, k)$ — непрерывные функции, заданные при $\|x\| < R$ и произвольных t и k. При этом эти функции периодичны по отношению к t с периодом 1, а по отношению к x удовлетворяют условиям Липшица. Кроме того, $p(0, t) \equiv 0$, $q(x, t, 0) \equiv 0$, но, вообще говоря, $q(0,t,k) \not\equiv 0$. Доказывается, что если все корни характеристического уравнения линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

имеют модули, меньшие единицы, то при достаточно малом k система (1) допускает по крайней мере одно периодическое решение периода 1, и это решение будет асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова. Для доказательства строится функция Ляпунова и используется принцип неподвижной точки Брауэра. Следует заметить, что на правые части (1) накладываются только условия Липшица. Если же наложить более жёсткие условия, потребовав чтобы эти правые части имели непрерывные частные производные по x, то теорема станет элементарной и может быть значительно обобщена.

И. Г. Малкин

727. **О некоторых линейных системах дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Томас** (Über gewisse lineare Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten. Thomas Johannes), Math. Nachr., 1953, 9, № 4, 197—200 (нем.)

Рассматривается якобиева система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (b_{ki}(t)x_k + c_{ki}(t)y_k), \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (1)$$
$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}(t)x_k + l_{ik}(t)y_k),$$

где все $a_{ik}(t)$, $b_{ik}(t)$, $c_{ik}(t)$ непрерывны на интервале $-T < t < T$, причем

$$a_{ik}(t) \equiv a_{ki}(t) \equiv a_{ik}(-t) \equiv a_{ik}(t+p),$$
$$b_{ik}(t) \equiv -b_{ik}(-t) \equiv b_{ik}(t+p), \qquad (-T < p < T)$$
$$c_{ik}(t) \equiv c_{ki}(t) \equiv c_{ik}(-t) \equiv c_{ik}(t+p).$$

Пусть фундаментальная система решений $x_i^\nu(t)$, $y_i^\nu(t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, 2n)$ определена начальными условиями

$$x_i^\nu(0) = y_i^{n+\nu}(0) = \delta_i^\nu,\ y_i^\nu(0) = x_i^{n+\nu}(0) = 0$$
$$(i, \nu = 1, \ldots, n).$$

Основываясь на тождестве

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i(t)\tilde{y}_i(t) + \tilde{x}_i(t)y_i(t)) = \text{const},$$

справедливом для любых двух решений системы (1), и выражая $x_i^\nu(t+p)$, $y_i^\nu(t+p)$, $x_i^\nu(-t)$, $y_i^\nu(-t)$ через $\{x_i^\nu(t), y_i^\nu(t)\}$, автор получает $n(2n-1)$ основных соотношений

$$x_i^\nu(p) = y_\nu^{n+i}(p) \qquad (i, \nu = 1, \ldots, n),$$
$$x_i^{n+\nu}(p) = x_\nu^{n+i}(p), \quad y_i^\nu(p) = y_\nu^i(p) \qquad (1 \leqslant i < \nu \leqslant n).$$

Такие же соотношения справедливы, если все рассматриваемые функции считаются аналитическими при $|t| < T$, причем $|p| < T$. [На стр. 198, строчка 4 сверху, опечатка: должно быть $\mathfrak{y}^{iT}d\mathfrak{x}^k / dt$ вместо $\mathfrak{y}^i d\mathfrak{x}^k / dt$.]

А. Д. Мышкис

728. **О некоторых решениях уравнения типа колебаний маятника. Сейферт** (On certain solutions of a pendulum-type equation. Sei-

fert George), Quart. Appl. Math., 1953, 11, № 1, 127—131 (англ.)

Рассматривается встречающееся в теории колебаний синхронного мотора уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + f(\theta)\frac{d\theta}{dt} = g(\theta), \qquad (1)$$

где $f(\theta)$ и $g(\theta)$ — периодические функции периода 2π. Полагая $y(\theta)=\theta'(t)$, получим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(\theta) - yf(\theta)}{y}. \qquad (2)$$

Ищутся периодические решения $\theta(t)$ второго рода уравнения (1), т. е. такие решения, что $y(\theta+2\pi)\equiv y(\theta)$. Этому вопросу были посвящены работы Трикоми (Tricomi F., Ann. R. Sc. Normale Sup. di Pisa, 1933, сер. II, 2, 1—20), Власова (Ж. техн. физики, 1939, 9), Минорского (Minorsky N., Introduction to non-linear mechanics, ч. I, J. W. Edwards, Ann. Arbor, 1947), Америо (Amerio L., Ann. R. Sc. Normale Sup. di Pisa, 1950, сер. III, 3, 19—57) и др. Америо доказал, что если $f(\theta)>0$ и $g(\theta)<0$ или $g(\theta)>0$ для всех θ, то такие периодические решения всегда существуют. Автор, используя метод Америо, дает достаточные условия существования периодических решений второго рода уравнения (1) в случае, если $f(\theta)>0$ и если функция $g(\theta)$ имеет в промежутке $[0, 2\pi]$ лишь конечное число простых нулей. В частности, для случая, рассмотренного Трикоми: $f(\theta)=\alpha$, $g(\theta)=\beta-\sin\theta$, где $0<\beta<1$ (α, β — постоянны), уточняется граница области существования периодических решений второго рода. *Б. П. Демидович*

729. О поведении решений системы двух дифференциальных уравнений в особой точке. Хартман, Винтнер (On the behavior of the solutions of real binary differential systems at singular points. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 117—126 (англ.)

Рассматривается классический вопрос о поведении интегральных кривых системы дифференциальных уравнений:

$$x' = f(x, y),\quad y' = g(x, y),\quad \text{где } f(0, 0) = g(0, 0) = 0,$$

в окрестности особой точки (0, 0). Изучаются условия существования $\lim\limits_{t\to b}\theta(t)$ при $t\to b$, где $\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$ — решение, стремящееся к нулю при $t\to b$.

Сначала относительно $f(x, y)$ и $g(x, y)$ предполагается лишь непрерывность в окрестности начала координат. Критерии существования и несуществования $\lim\limits_{t\to b}\theta(t)$ авторы выражают при помощи функций:

$$F(\theta) = \lim_{r\to+0}\frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r},$$

$$G(\theta) = \lim_{r\to+0}\frac{g(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r},$$

а также

$$J(\theta) = G(\theta)\cos\theta - F(\theta)\sin\theta,$$

$$K(\theta) = G(\theta)\sin\theta + F(\theta)\cos\theta,$$

причем предполагается, что пределы, определяющие $F(\theta)$ и $G(\theta)$, существуют и равномерны по θ в каждом замкнутом отрезке. Кроме того, накладываются существенные ограничения на структуру множества нулей $J(\theta)$.

В качестве примера доказанных теорем приведем следующую теорему:

Если существует решение системы, входящее в начало координат, и если $\lim\limits_{t\to b}\theta(t)$ не существует, то это решение является спиралью.

Эта теорема является обобщением известной теоремы Бендиксона для аналитического случая и перекрывается известными теоремами других авторов (см., например, Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 100, теорема 20).

Указанную выше теорему автор выводит из утверждения: Если $J(\theta)$ допускает как положительные, так и отрицательные значения, то все интегральные кривые входят в начало с определенным направлением касательной.

Прилагая эти теоремы к рассмотрению классического случая:

$$x' = \alpha x + \beta y + f^*,\quad y' = \gamma x + \delta y + g^*,$$

где

$$f^* = o(r),\quad g^* = o(r),$$

авторы выводят ранее известные результаты и указывают, что в случае особого узла $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ могут фактически наблюдаться семь возможностей, охватываемых неравенствами

$$-\infty \leqslant \liminf_{t\to\infty}\theta(t) \leqslant \limsup_{t\to\infty}\theta(t) \leqslant \infty.$$

В приложении рассматривается система $x' = f(x, t)$, где x и f — векторы, имеющие n компонент. Утверждается, что достаточным условием для того, чтобы не существовало решений этой системы, входящих в начало при $t\to\infty$ или $t\to-\infty$, является существование для малых $s>0$ непрерывной функции $\varphi(s)$, удовлетворяющей условиям:

$$1)\ \int_{+0}\frac{ds}{\varphi(s)} < \infty,\qquad 2)\ |xf(t, x)| \geqslant \varphi(s) > 0,$$

где $s = (x\cdot x)$ — скалярное произведение.

Приводится также некоторое обобщение этого критерия. *В. В. Немыцкий*

730. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае. Андреев А. Ф., Прикл. математика и механика. 1953, 17, № 3, 333—338

Рассматривается система уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$$

и устанавливается, что для существования центра необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$K<0,\ 3A + L = 0,\quad 2A(B + M) + K(C + 3N) = 0,$$

$$(B + M)(2A^3 - AKM - K^2N) = 0.$$

Этим обобщаются результаты И. С. Куклеса (Докл. АН СССР, 1944, 42, № 5, 212—215), относя-

щиеся к случаю, когда первое уравнение имеет вид $\frac{dx}{dt} = y$.

В. В. Немыцкий

731. О системах дифференциальных уравнений Σ с неподвижными критическими точками, встречающихся в проблеме Римана для линейных систем порядка $m \geqslant 2$. Гарнье (Sur les systèmes différentiels Σ, a points critiques fixes, associés au problème de Riemann pour les systèmes linéaires d'ordre $m \geqslant 2$. Garnier René), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 2, 161—164 (франц.)

В начале статьи автор формулирует задачу Римана в следующем виде:

Пусть на плоскости комплексной переменной x дано $n+3$ точек t_i $(i = 1,2, \ldots, n+3)$, которые соединены простым замкнутым контуром l. Требуется найти две матрицы m-го порядка Φ^+ и Ψ^-, голоморфные соответственно внутри и вне l и на самом l, кроме, быть может, точек t_i, где элементы этих матриц имеют вид $(x-t_l)^{r_{ij}} H_{jk}$, причем H_{jk} — голоморфные функции при $x = t_i$, удовлетворяющие на дуге $t_i t_{i+1}$ граничным условиям $\Phi^+ = C_i \Psi^-$, где C_i — матрица с постоянными элементами. Решения этой задачи, принадлежащие определенному классу, удовлетворяют системе

$$\frac{dy}{dt} = yB, \qquad \text{где } B = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A^i}{x - t_i},$$

причем матрицы A^i как функции точек t_i удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} (t_k - t_l)\,\frac{dA^k}{dt_i} &= A^i A^k - A^k A^i, \quad k \neq i, \\ \sum_{h=1}^{m+2} \frac{dA^h}{dt_i} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Автор изучает свойства решения этой системы и показывает, что A^k стремится к определенному конечному пределу при $t_n \to 0$. *Н. П. Векуа*

732. О решениях на временной полуправой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Градштейн И. С., Мат. сб., 1953, **32(74)** : 3, 533—544

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \eta), \qquad \eta \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \eta), \qquad (1)$$

содержащая малый параметр η, и система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0), \qquad 0 = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0), \qquad (2)$$

получающаяся из системы (1) при $\eta = 0$ (здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{F}$ — m-мерные векторы, $\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}$ — μ-мерные векторы).

Пусть система (2) имеет решение $\mathbf{x} \equiv 0$, $\mathbf{y} \equiv 0$. Целью реферируемой работы является установление условий, при которых система (1) имеет решение, близкое к решению $\mathbf{x} \equiv 0$, $\mathbf{y} \equiv 0$ системы (2) на полупрямой $t \geqslant t_1 > 0$.

Теория этого вопроса, как было выяснено автором в предыдущих работах (напр., Мат. сб., 1953, **32(74)**:2,263—286), тесно связана с теорией устойчивости Ляпунова.

Пользуясь двумя методами Ляпунова, можно двояким образом сформулировать требуемые условия:

1) Пусть правые части (1) имеют вид $a(\eta)\mathbf{X} + b(\eta)\mathbf{Y} + \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \eta)$, $\alpha(\eta)\mathbf{X} + \beta(\eta)\mathbf{Y} + \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \eta)$ (a, b, α, β — матрицы). Векторы φ и ψ удовлетворяют некоторым условиям, характеризующим их малость. Если при этом действительные части корней характеристических уравнений

$$\operatorname{Det} \left\| \begin{matrix} a(0) - \omega E & \vdots & b(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha(0) & \vdots & \beta(0) \end{matrix} \right\| = 0, \quad \operatorname{Det} \| \beta(0) - \Omega E \| = 0$$

меньше $-3q$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\eta_1 > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от η $(0 < \eta \leqslant \eta_1)$ такое, что при $|\mathbf{X}(0, \eta)| < \delta$, $|\mathbf{Y}(0, \eta)| < \delta$ и $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|\mathbf{X}| < \varepsilon \exp(-qt), \qquad |\mathbf{Y}| < \varepsilon \exp(-qt).$$

Метод доказательства состоит в переходе к интегральным уравнениям с известными ядрами, которые можно оценить, пользуясь оценками для корней характеристических уравнений. Эти интегральные уравнения решаются методом последовательных приближений. Если нулевое приближение выбрать лежащим в ε-окрестности тривиального решения, то тем же свойством обладают и все последующие приближения, если только начальные значения по модулю не превосходят $\delta(\varepsilon)$, а $0 < \eta \leqslant \eta_1$. Экспоненциальное убывание решений доказывается заменой переменных $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* \exp(-qt)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^* \exp(-qt)$.

2) Пусть правые части (1) не зависят от η. Тогда асимптотическая устойчивость тривиального решения $\mathbf{x} \equiv 0$, $\mathbf{y} \equiv 0$ обеспечивается существованием функции Ляпунова $v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t)$, удовлетворяющей обычным требованиям. Даются некоторые специальные условия, гарантирующие отрицательную определенность $\frac{dv}{dt}$.

Автор указывает, что его метод дает возможность исследовать и более сложные системы, содержащие несколько параметров различных порядков малости. *А. Б. Васильева*

733. Решение обыкновенных линейных уравнений, содержащих параметр. Эванс (Solution of linear ordinary differential equations containing a parameter. Evans Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 92—94 (англ.)

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$y^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{pj} P_j(\lambda, x)\, y^{(n-j)} = 0$$

с начальными условиями

$$y^{(j)}(\lambda, 0) = j! \sum_{\alpha=0}^{\infty} b_{\alpha j} \lambda^{-\alpha}, \qquad j = 0, 1 \ldots, n-1,$$

где $P_j(\lambda, x) = \sum_{\mu=-pm_j}^{\infty} \sum_{\nu=[(p-\mu-1)/p]}^{\infty} a_{j,\mu,\nu}\lambda^{-\mu}x^{\nu}$,

причем ряды сходятся при $|x|<x_0$ и $|\lambda|>\lambda_0$; n и p — целые положительные числа, а m_j — неотрицательные числа.

Утверждается, что задача имеет решение

$$y(\lambda, x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} b_{\alpha,\beta}\lambda^{p\beta-\alpha}x^{\beta}$$

при $|x|<x_0$ и $|\lambda|>\lambda_0$.

Отмечается, что результаты Лангера (Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 461—490) и Черри (Cherry T. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, 224—257) являются частными случаями результатов настоящей работы. Доказательства только намечены.

С. А. Гальперн

734. О разложении по собственным функциям уравнения $y''+\{\lambda-q(x)\}y=0$. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 1, 17—20

Пусть $l[u] = u'' - q(x)u$, $-\infty<x<\infty$, где функция $q(x)$ вещественная и суммируемая в любом конечном интервале. Каждой краевой задаче, порождаемой операцией $l[u]$, соответствует своя спектральная функция $\theta(x, y, \lambda)$ (в дальнейшем нормируемая условием $\theta(x, y, 0)\equiv 0$), которая однозначно определяется резольвентой R_z краевой задачи, из соотношения

$$R_z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda}\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, y, \lambda) f(y)\, dy.$$

Формулу разложения функции $f(x)\in L^2(-\infty, \infty)$ по собственным функциям краевой задачи можно записать в виде

$$f(x) = \underset{\nu\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\{\theta(x, y, \nu) - \theta(x, y, -\nu)\}\, dy, \quad (1)$$

где через l.i.m. обозначается предел в метрике пространства $L^2(-\infty, \infty)$.

При $\mu>0$ вводится функция $\theta_1(x, y, \mu) = \theta(x, y, \mu^2)$.

Теорема 1. Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале, то при $\mu\to\infty$

$$\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right) d_\nu\theta_1(x, y, \nu) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2\frac{\mu(x-y)}{2}}{\mu(x-y)^2} + O(1),$$

где остаточный член оценивается равномерно в каждой конечной области.

Теорема 2. Если функция $q(x)$ такова, что: 1) для каждого конечного интервала (x_0, x_1) можно указать числа $C = C(x_0, x_1)$ и $\alpha = \alpha(x_0, x_1) > 0$ такие, что при $x\in(x_0, x_1)$ и $0<t\leqslant 1$ $\int_{x-t}^{x+t} |q(s)|\, ds < Ct^{\alpha}$, и 2) краевая задача не имеет отрицательного спектра, то при $\mu\to\infty$

$$\theta_1(x, y, \mu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\mu(x-y)}{x-y} + O(1).$$

Исходя из этих асимптотических формул для спектральной функции, автор исследует обычную сходимость и суммируемость средними, по Чезаро, разложения (1).

Пусть функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале. Если $f(x)\in L^2(-\infty, \infty)$ и

$$r(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\theta(x, y, \nu) - \theta(x, y, -\nu) - \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\sqrt{\nu}(x-y)}{x-y}\right\} dy,$$

то равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu} r(x, \nu)\, d\nu = 0.$$

Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если $f(x)\in L^2(-\infty, \infty)$, то равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\theta_1(x, y, \mu) - \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\mu(x-y)}{x-y}\right\} dy = 0,$$

т. е. разложение (1) сходится к функции $f(x)$ во всех точках, где сходится разложение этой функции в обычный интеграл Фурье.

В работе даются также оценки разности между средними по Чезаро порядка $\delta\leqslant 1$ разложения (1) и обычным интегралом Фурье в условиях теоремы 2. Из этих оценок, в частности, следует, что если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале и отрицательный спектр отсутствует, то разложение (1) в точках непрерывности функции $f(x)$ суммируемо средними по Чезаро любого порядка $\delta>0$ к значению этой функции; частный случай последнего утверждения был ранее доказан Титчмаршем (Titchmarsh E. C., Quart. J. Math., 1951, **2**, № 8, 258—268), который предполагал, что спектр дискретен.

Отмечается, что все результаты справедливы для краевых задач, порождаемых операций $l[u]$ в любом интервале (a, b), $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$.

В. А. Марченко

735. Спектральная теория и ее применение к задачам на собственные значения для дифференциальных уравнений. Мак-Юэн (Spectral theory and its application to differential eigenvalue problems. McEwen W. H.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 223—233 (англ.)

Абстрактная теория операторов в пространстве Гильберта применяется к разложениям по собственным функциям уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0. \quad (1)$$

Изложение носит описательный характер; доказательства почти отсутствуют.

Статья состоит из 8 параграфов: 1) Введение; 2) Абстрактное пространство Гильберта; 3) Линей-

ные многообразия и подпространства; 4) Самосопряженные операторы; 5) Спектр самосопряженного оператора; 6) Спектральное разложение самосопряженного оператора и связанная с ним формула; 7) Применение к дифференциальным задачам; 8) Три примера (разложение в обычный ряд Фурье, разложение в обычный интеграл Фурье, разложение по полиномам Эрмита).

В конце § 7 автор утверждает, что в случае бесконечного интервала не следует присоединять к уравнению (1) никаких граничных условий на бесконечности. Как известно, это имеет место лишь в случае отсутствия дефектных чисел.

Б. М. Левитан

736. Решение краевых задач при помощи функциональных преобразований. Бюрга (Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles. Burgat Paul), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 2, 146—152 (франц.)

Решается на интервале (a, b) обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$Ly + ry = f(x) \tag{1}$$

при неоднородных граничных условиях

$$L_i(y) = \alpha^i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Предполагается, что соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. По формуле Грина для решения y задачи (1), (2) и для любой функции v

$$(y, L^*v + rv) = (f, v) - A(\vec{Y}, \vec{V}), \tag{3}$$

где $\vec{Y} = (y(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b))$, $\vec{V} = (v(a), \ldots, v^{(n-1)}(b))$, A — билинейная форма от этих векторов. Последнюю форму автор представляет в виде суммы произведений линейных форм:

$$A(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{i=1}^{2n} \widetilde{Y}_i(y)\, \widetilde{V}_i(v),$$

причем $\widetilde{Y}_i(y) \equiv L_i(y)$ для $i = 1, \ldots, n$. Если функция v удовлетворяет однородным граничным условиям $\widetilde{V}_j(v) = 0$ $(j = n+1, \ldots, 2n)$, то формула (3) приобретает следующий вид:

$$(y, L^*v + rv) = (f, v) - \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \widetilde{V}_i(v). \tag{4}$$

Предполагая далее, что «союзная» задача $L^*v + \lambda v = 0$, $\widetilde{V}_j(v) = 0$ $(j = n+1, \ldots, 2n)$ — самосопряженная, автор получает следующие формулы для коэффициентов Фурье искомого решения y по собственным функциям v_k «союзной» задачи:

$$(y, v_k) = \frac{1}{\lambda_k - r}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \widetilde{V}_i(v_k) - (f, v_k)\right];$$

λ_k — соответствующие собственные числа. В качестве примеров применения метода рассматриваются обыкновенные уравнения второго порядка и первая краевая задача для уравнения теплопроводности.

М. И. Вишик

737. Элементарное доказательство существования для течения в ламинарном пограничном слое с потенциальным течением $U = u_1 x^m$ при $m > 0$ в случаях отсасывания и вдувания. Иглиш (Elementarer Existenzbeweis für die Strömung in der laminaren Grenzschicht zur Potentialströmung $U = u_1 x^m$ mit $m > 0$ bei Absaugen und Ausblasen. Iglisch Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 4, 143—147 (нем.)

Рассматривается пограничный слой вязкой несжимаемой жидкости вдоль стенки плоского бесконечного клина с углом раствора $\beta\pi$ в случае, когда скорость потенциального течения $U = u_1 x^m$, где $m > 0$, u_1 — постоянное. Начало координат находится в вершине клина, а ось x лежит в плоскости стенки клина. Известно, что, используя уравнения пограничного слоя, задачу определения функции тока можно свести к следующей задаче.

Найти функцию $f(\eta)$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

и граничным условиям

$$f(0) = C, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1,$$

означающим, что вдоль стенки клина продольная составляющая скорости равна нулю, а составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, отлична от нуля и зависит от x; $C > 0$ при отсасывании и $C < 0$ при вдувании. Условие отсутствия обратных течений имеет вид

$$f'(\eta) > 0 \text{ при } 0 < \eta < \infty.$$

Эта граничная задача явилась предметом исследований разных авторов. Изучались теоремы существования и единственности при различных значениях параметров β и C. Автор обобщает полученные им ранее результаты и доказывает, что рассматриваемая граничная задача при $\beta > 0$ и произвольном C имеет по крайней мере одно решение.

Д. Е. Долидзе

738. О теореме Перрона в теории разностных уравнений. Гельфонд А. О., Кубенская И. М., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 2, 83—86

Рассматривается фундаментальная система решений $f_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ линейного разностного уравнения

$$f(x+n) + a_1(x) f(x+n-1) + \cdots + a_n(x) f(x) = 0$$

с предельно-постоянными коэффициентами $a_m(x)$, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{x \to \infty} a_m(x) = a_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad a_n \neq 0,$$
$$a_n(x) \neq 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

и дается оценка порядка приближения

$$f_k(x+1) / f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при $x \to \infty$ к различным по модулю нулям λ_k многочлена $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$, когда известны порядки убывания разностей $|a_k(x) - a_k|$.

Для получения оценки используется теорема Перрона. Новое и весьма простое доказательство этой теоремы дано М. А. Евграфовым (РЖМат, 1953, реф. 248). *Ш. Е. Микеладзе*

739 К. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Голубев В. В. [для университетов], 287 стр., Гостехиздат, М., 1953

Книга представляет собой обработку курса лекций, читанных автором в течение ряда лет в Московском университете, и содержит приложение методов теории аналитических функций и аналитической теории дифференциальных уравнений к решению классической задачи механики о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Книга состоит из введения и восьми глав. Введение содержит краткий очерк истории решения задачи. В первой главе выводятся динамические уравнения Эйлера, которые преобразуются затем к форме уравнений Гесса — Шиффа, а также уравнения Пуассона; указываются три первых интеграла уравнений. Подробно изложена теория последнего множителя Якоби для случая двух уравнений (с указанием гидромеханического смысла последнего множителя) и для случая системы с любым числом переменных и ее приложение к интегрированию системы уравнений, в частности, уравнений, описывающих движение тяжелого твердого тела.

Глава II содержит решение задачи С. В. Ковалевской о нахождении всех случаев, когда интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела представляют собой однозначные, мероморфные на всей плоскости переменного t функции. В отличие от метода С. В. Ковалевской, автор решает эту задачу методом малого параметра, представляющим собой видоизменение метода уравнений в вариациях А. М. Ляпунова. Изложив результаты Пуанкаре и Пенлеве, лежащие в основании метода малого параметра, автор сначала рассматривает случай, когда моменты инерции тела A, B, C различны. После упрощения уравнений вводится малый параметр α и из рассмотрения первого и второго членов разложения в ряд по α находятся условия, при которых уравнения могут иметь однозначные интегралы. Затем рассмотрен случай $A = B$. Может, однако, оказаться, что выведенные необходимые условия окажутся недостаточными для существования однозначных интегралов; для случая Г. Г. Аппельрота методом малого параметра автор устанавливает наличие многозначных интегралов с критическими трансцендентными подвижными особыми точками.

Излагается сущность метода С. В. Ковалевской и устанавливаются четвертые алгебраические интегралы для всех случаев существования однозначных интегралов уравнений задачи.

Глава III содержит приведение уравнений движения тяжелого твердого тела к квадратурам в случаях Эйлера — Пуансо и Лагранжа — Пуассона. Для этих случаев интеграция уравнений приведена к обращению эллиптических интегралов и найдены выражения для углов Эйлера. Рассмотрены также вырождения случая Эйлера: 1) $A = B$, 2) $A = B = C$, 3) стационарные движения, и случая Лагранжа: 1) $A = B = C$, 2) сферический маятник ($C = 0$), 3) простой маятник. Показано, что движение тела при условиях Лагранжа в общем случае сводится путем некоторого преобразования к случаю движения тела с кинетической симметрией, а в случае $r = 0$ — к движению сферического маятника.

Рассмотрен также вопрос об условиях, при которых эллиптические интегралы вырождаются в элементарные. Помимо ранее отмеченных случаев здесь удается выделить новый случай при условиях Лагранжа.

В главе IV излагается приведение уравнений движения к квадратурам для случая С. В. Ковалевской. Здесь вместо переменных p, q, γ и γ' вводятся переменные С. В. Ковалевской, в которых записываются четыре алгебраических интеграла. Исключением двух незаменённых переменных r и γ'' получены два уравнения с четырьмя переменными, позволяющие определить две из оставшихся четырех переменных через две другие переменные, в результате чего получается основное уравнение С. В. Ковалевской и, наконец, вводятся две основные переменные s_1 и s_2, для которых составляются дифференциальные уравнения. Интегрирование уравнений приводится к обращению системы ультраэллиптических интегралов.

В главах V и VI излагаются математические основания методов решения задачи обращения эллиптических и ультраэллиптических интегралов. Здесь изложена теория поверхностей Римана для случая двузначных функций и рассмотрены особые точки алгебраических функций, истолковываемых как функции точки поверхности Римана. Преобразование поверхности наложения в обобщенный тор и в многоугольник Пуанкаре делает совершенно наглядным построение системы канонических разрезов, играющих основную роль в теории. Устанавливаются свойства абелевых интегралов 1-го рода и геометрическое соответствие между точками u и z, даваемое этими интегралами.

Дано полное решение задачи обращения при помощи ϑ-функций Якоби для случая эллиптических интегралов и намечен, со всеми подробностями и со всем необходимым аппаратом теории функции ϑ двух переменных, путь решения задачи обращения ультраэллиптических интегралов (жанра $p = 2$).

Глава VII содержит интегрирование уравнений движения в случае С. В. Ковалевской. Дано выражение функций p, q, r, γ, γ', γ'' через s_1 и s_2 и выяснена их однозначность относительно времени t. Изучены случаи вырождения: Н. Б. Делоне, Б. К. Млодзеевского, а также случай перманентных вращений.

В главе VIII изложены некоторые частные случаи интегрирования уравнений движения. Дана общая характеристика исследований, последовавших за работой С. В. Ковалевской, и подробно рассмотрены случаи Гесса — Аппельрота, Горячева — Чаплыгина и Бобылева — Стеклова.

В заключение ставится вопрос о путях дальнейших исследований в решении этой классической задачи механики. *В. В. Румянцев*

740 РЕЦ. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Лейтон (An introduction to the theory of differential equations. Leighton W., pp. 174, McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., 30s.)

[Рецензия: (F. B.), Techn. J., 1953, **45**, № 4, 116 (англ.)]

741 РЕЦ. **Дифференциальные уравнения. Нельсон, Фолли, Корал** (Differential equations. Nelson A. L., Folley K. W., Coral M., pp. 299, George G. Harrap and Co., Ltd., 17 s. 6d.) [Рецензия: (F. B.), Techn. J., 1953, **45**, № 4, 115—116 (англ.)]

742 Д. **Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений. Сташевская В. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1953

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

743. **Упрощение метода Бертрана интегрирования полного дифференциального уравнения. Пьяджо** (A simplification of Bertrand's method for integrating a total differential equation. Piaggio H. T. H.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 319, 59—60 (англ.)

Предлагаемый упрощенный метод интегрирования уравнения Пфаффа в случае полной интегрируемости состоит в следующем: Если уравнение имеет вид $E \equiv P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$, то для приведения его к каноническому виду $du + v\,dw$ находим прежде всего один интеграл $w(x, y, z) = a$ системы

$$dx \Big/ \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = dy \Big/ \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = dz \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

(вместо двух интегралов в обычном методе Бертрана); одну из переменных выражаем через две другие и a, например $z = f(x, y, a)$. Подставляя z в E, получаем полный дифференциал $E = d\varphi(x, y, a)$; полагаем $u = \varphi(x, y, w(x, y, z))$ и находим v из уравнения $R = \partial u / \partial z + v\,\partial u / \partial z$ как функцию u, w, после чего исходное уравнение приводится к виду $du + F(u, w)\,dw = 0$. Найдя решение последнего уравнения, выражаем u, w через x, y, z.

Л. А. Чудов

744. **Об особых точках систем в полных дифференциалах. Пини** (Sui punti singolari per i sistemi ai differenziali totali. Pini Bruno), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 95—104 (итал.)

Рассматривается пфаффова система уравнений

$$dx_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}(x_1, x_2, x_3)\,du + \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}(x_1, x_2, x_3)\,dv \quad (i = 1, 2, 3),$$

коэффициенты которой аналитичны в некоторой области C (вещественного) пространства (x_1, x_2, x_3) и удовлетворяют условию полной интегрируемости

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \frac{\partial \beta_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем $\det(\partial \alpha_i / \partial x_k) \neq 0$ и $\det(\partial \beta_i / \partial x_k) \neq 0$ всюду в C. Особые точки для такой системы определяются как пределы при $u^2 + v^2 \to \infty$ (по какой-либо линии в плоскости u, v) для точки интегральной поверхности $(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, особые линии определяются, по существу, как линии, состоящие из особых точек. Особые точки могут быть только там, где ранг матрицы

$$M = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\|$$

меньше двух; в зависимости от того, равен ли этот ранг 1 или 0, особая точка считается 1-го или 2-го рода.

Пусть точка (0, 0, 0) является особой 2-го рода. Тогда вблизи этой точки система уравнений может быть записана в виде

$$dx_i = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k + \ldots\right) du + \left(\sum_{k=1}^{3} b_{ik}x_k + \ldots\right) dv \quad (i = 1, 2, 3),$$

где невыписанные члены имеют степень выше первой. Пусть матрица $\|a_{ik}\|$ (соответственно $\|b_{ik}\|$) имеет только простые элементарные делители, характеристические корни λ_1, λ_2, λ_3, (соответственно μ_1, μ_2, μ_3), причем $\delta_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_i\lambda_j \\ \mu_i\mu_j \end{vmatrix} \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, а уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda_{i_j} + \mu_{i_j}) = \lambda_i + \mu_i \quad (i = 1, 2, 3;\ \ i_j = 1, 2, 3;\ \ m \geqslant 2)$$

не имеет решений; последнее нужно для построения решения в виде ряда по методу Ляпунова (с обоснованием сходимости при помощи исследования мажоранты). Тогда при всех вещественных λ, μ строение совокупности интегральных поверхностей вблизи начала координат имеет характер трехмерного седла (если все δ_{12}, δ_{23}, δ_{31} одного знака) или узла и седла (в противном случае). Если среди λ, μ имеются комплексные, то это строение имеет черты седла и фокуса или узла и фокуса.

Приведено также краткое исследование особой точки 1-го рода при аналогичных предположениях; она оказывается лежащей на особой линии, причем выясняется строение совокупности интегральных поверхностей вблизи этой линии. Имеются примеры. Все изложение отличается сжатостью, ряд доказательств опущен. [На стр. 96, строки 20—14 снизу, приведены не все необходимые предположения.]

А. Д. Мышкис

745. **Векторные методы в дифференциальных уравнениях. Релтон** (Differential equations

by vector methods. Relton F. E.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 120—122 (англ.)

Излагается известное условие, при котором

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

допускает интегрирующий множитель, и свойства последнего. *С. А. Гальперн*

746. Теорема существования Коши при модифицированных начальных условиях. Брустер (A modified initial condition for Cauchy's existence theorem. Brewster J. Pendleton), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 296—302 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$f(x, y, u, u_y) = u_x, \qquad (1)$$

где f — функция, аналитическая в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, $u(0,0) = c_0$, $u_y(0,0) = c_1$ и $f_{u_y} \neq 0$ в этой окрестности.

Пусть заданы последовательности чисел c_n и пар натуральных чисел j_n и k_n, удовлетворяющих условиям $j_n + k_n = n$, такие, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{j_n} y^{k_n}}{j_n!\, k_n!}$ имеет ненулевые радиусы сходимости. Тогда уравнение (1) имеет единственное аналитическое решение $u = u(x, y)$ удовлетворяющее условиям $\frac{\partial^n u(0,0)}{\partial x^{j_n} \partial y^{k_n}} = c_n$. *С. А. Гальперн*

747. О совокупности решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений. Лукомская М. А. Уч. зап. Белорусского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, № 15, 41—45

Доказывается, что система уравнений

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial x} &= a_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ c_2 \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial x} &= a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — достаточно гладкие функции такие, что

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial a_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial y} \quad (i = 1, 2),$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}^2 \not\equiv 0,$$

$$a_1 d_2 = b_2 c_1, \quad a_1 (d_1 - c_2) = c_1 (b_1 - a_2),$$

$$b_2 (d_1 - c_2) = d_2 (b_1 - a_2),$$

является замкнутой по отношению к Σ-интегрированию (Bers L., Gelbart A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **56**, № 1, 67—93).

Это значит, что для того, чтобы функция $f_1(z) = u_1 + iv_1$ была решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, d_\Sigma z = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_2 u + b_2 v)\, dx + (c_2 u + d_2 v)\, dy + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_1 u + b_1 v)\, dx + (c_1 u + d_1 v)\, dy,$$

где $f(z) = u + iv$ — решение системы (1). *Г. Н. Положий*

748. Удовлетворение граничным условиям и функция Грина задачи Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения. Браудер ((Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet problem for the general linear elliptic equation. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 3, 179—184 (англ.)

Рассматривается в области D линейное эллиптическое дифференциальное уравнение порядка $2m$

$$Ku = \eta, \qquad (1)$$

причем $\eta \in C^1(D) \cap L^2(D)$. Функция u называется решением задачи Дирихле для уравнения (1), соответствующим «граничной» функции g, если функция $u \in C^{2m}(D)$ удовлетворяет в обычном смысле уравнению (1) и разность $u - g$ обращается вместе с производными до $(m-1)$-го порядка в среднем в нуль на границе D. Доказано, что всякое обобщенное в области D решение уравнения (1), коэффициенты при j-ых производных которого принадлежат $C^{2m+j+4}(D)$, почти всюду совпадает с функцией $v \in C^{2m}(D)$, причем $Kv = \eta$. Пусть область D двумерная и имеет локально связную границу без изолированных точек. Тогда решение u (в указанном выше смысле) задачи Дирихле удовлетворяет граничным условиям в обычном смысле, т. е. разность $u - g$ вместе со всеми производными до $(m-1)$-го порядка обращается в нуль на границе области. Аналогичное предложение сформулировано и для n переменных, однако в этом случае автор заранее требует от решения u задачи Дирихле, чтобы оно принадлежало $C^{m-1}(\bar{D})$.

Под функцией Грина задачи Дирихле понимается такая измеримая в $D \times D$ функция $G(x, z)$, что для $\eta \in C^1(D) \cap L^2(D)$ функция $\psi(z) = \int_D G(x, z)\eta(x)\, dx$ принадлежит $C^{2m}(D)$, обращается вместе с $(m-1)$-ми производными в нуль на границе области D (в обобщенном смысле) и $K\psi = \eta$ в D. Предполагая, что задача Дирихле для (1) имеет единственное решение, автор доказывает, что существует соответствующая функция Грина, причем она $2m$ раз непрерывно дифференцируема по x и по z для $x \neq z$ и является фундаментальным решением для (1) в области D. *М. И. Вишик*

749. Замечания к теореме Пиконе об уравнении $\Delta u + cu = 0$. Пини (Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$. Pini Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 19—25 (итал.)

Даются достаточные условия для того, чтобы уравнение

$$\Delta u + C(P)\, u = 0 \qquad (1)$$

в ограниченной области пространства n измерений имело единственное решение.

Пусть τ — ограниченная область в пространстве n измерений ($n \geqslant 2$) с достаточно гладкой границей σ; $\sigma(t)$ — параллельная к σ поверхность, находящаяся внутри τ на расстоянии t от σ; точки $P_1, \ldots, P_\mu$

находятся на σ, точки $P_{\mu+1}, \ldots, P_{\mu+\nu}$ — внутри τ; r_i $(i=1, \ldots, \mu+\nu)$ — расстояния от этих точек до переменной точки области τ; $\sigma_i(t)$ — гиперсфера $r_i = t$. Пусть $q > 1$ и α — некоторое число из промежутка $0 < \alpha < \frac{(n-2)(q-1)}{q}$, если $n > 2$, и $0 < \alpha < \frac{q-1}{q}$, если $n = 2$. Положим $\omega(P) = \sum_{i=1}^{\mu+\nu} r_i^{-\alpha}$, если $n > 2$, и $\omega(P) = \sum_{i=1}^{\mu+\nu} \left(\lg \frac{\delta}{r_i}\right)^{\alpha}$, если $n = 2$.

Доказывается теорема:

Если $u(P)$ есть такое решение уравнения (1) в области $\tau - \sigma - \sum_{i=1}^{\nu} P_{\mu+i}$, что

$$\lim_{t\to 0} \int_{\sigma(t)} \left|\frac{u}{\omega}\right|^q d\sigma = 0, \quad \lim \frac{1}{t} \int_{\sigma_i(t)} \left|\frac{u}{\omega}\right|^{\bullet} d\sigma = 0$$

$$(i = \mu+1, \ldots, \mu+\nu)$$

и если

$$C(P) < \frac{\alpha\left(n-2-\frac{\alpha q}{q-1}\right)}{\delta^2} \text{ при } n > 2$$

$$C(P) < \frac{\alpha\left(1-\frac{\alpha q}{q-1}\right)e^2}{\delta^2} \text{ при } n = 2,$$

где δ превышает диаметр области τ, а e — неперово число, то $u \equiv 0$.

Если $\frac{u}{\omega}$ непрерывна в τ вплоть до границы σ и обращается в нуль в точках σ, то можно положить $q \to \infty$; восстанавливаются результаты, полученные ранее в работах Пиконе и Лея (Picone M., Ann. Soc. Polonaise Mat., 1948, **21**, 161—169; Leja F., Ann. Soc. Polonaise Mat., 1948, **21**, 170—172).

Во второй части работы указывается, что если функцию $\omega(P)$ определить так, чтобы $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 0$, и если $C(P) < -\frac{\Delta\omega}{\omega}$, то всякое решение уравнения (1) тождественно обращается в нуль, если на границе $\frac{u}{\omega} \not\equiv 0$.

В качестве примера рассматривается

$$\omega(P) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\mu} r_i^{2-n} \sin\left(\varepsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta}\right) \text{ при } n > 2 \\ \left(\varepsilon > 0,\ \varepsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta} < \frac{\pi}{2}\right) \\ \sum_{i=1}^{\mu} \cos\frac{\pi r_i}{2\delta} \lg\frac{e^2\delta}{r_i} \text{ при } n = 2 \end{cases}$$

и устанавливается соответствующая теорема. Она содержит как частный случай теорему Брело (Brelot M., Rend. Circolo Mat., Palermo, 1931, **55**, 21—49) для $n = 2$ и непрерывной $C(P) < 0$.

Х. Л. Смолицкий

750. Эллиптические системы дифференциальных уравнений второго порядка. Морри (Second order elliptic systems of differential equations. Morrey C. B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 3, 201—206 (англ.)

Рассматривается в области G эллиптическая в общем смысле система вида

$$a_{ij}^{\alpha\beta} u^j_{x_\alpha x_\beta} = c_{ij}^{\alpha} u^j_{x_\alpha} + d_{ij} u^j + f_i \qquad (1)$$

(суммирование по одинаковым индексам) при весьма общих предположениях относительно коэффициентов. Для обобщенных решений u, удовлетворяющих (1) почти всюду, установлена оценка

$$\left\{\int_{G_1} \sum_{i,\alpha,\beta} \left(u^i_{x_\alpha x_\beta}\right)^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant K_1, \qquad (2)$$

где $\overline{G}_1 \subset G$, причем K_1 зависит от норм u и f в L_2, коэффициентов системы (1) и расположения G_1 в G. Кроме того, в зависимости от гладкости коэффициентов a, c, d и f устанавливается гладкость решения u. Например, если $a, \ldots \subset C_\mu^{(n)}$ (т. е. непрерывны n-ые производные и они удовлетворяют условию Гёльдера с показателем μ), то $u \in C_\mu^{(n+2)}$. Аналогичные результаты получены также для обобщенных в некотором интегральном смысле решений u системы (1) (однако в этом случае в оценке (2) берутся первые производные от u).

Если система (1) сильно эллиптическая (Вишик М. И., Мат. сб. 1951, **29(71)** : 3, 615—676), то ограничение $\overline{G}_1 \subset G$ можно заменить на $G_1 \subset G$, если на общей части границ областей G_1 и G решение u обращается в нуль.

Кроме того, сформулированы предложения о гладкости решений нелинейных эллиптических систем.

М. И. Вишик

751. Линейные параболические дифференциальные уравнения любого порядка; общие граничные задачи для эллиптических уравнений. Браудер (Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 3, 185—190 (англ.)

Рассматривается смешанная задача для параболического уравнения

$$(-1)^{m+1} Ku + \eta = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1)$$

$(x, t) \in D \times R$, $R = \{t > 0\}$, $\eta \in C^1(D) \cap L^2(D)$. K — линейный эллиптический самосопряженный оператор порядка $2m$, коэффициенты которого не зависят от t и достаточное число раз дифференцируемы. Доказывается существование решения u уравнения (1), $2m$ раз непрерывно дифференцируемого по x, бесконечно дифференцируемого по t, удовлетворяющего в среднем начальным условиям при $t = 0$ и на боковой поверхности цилиндра $D \times R$, обращающегося в нуль (в обобщен-

ном смысле) вместе с производными до $(m-1)$-го порядка. При доказательстве используются свойства функции Грина $G(x, z)$ задачи Дирихле для оператора K. Решение u задачи получается как предел частичных сумм соответствующего ряда Фурье по собственным функциям оператора K при нулевых граничных условиях.

Далее рассматриваются краевые задачи для эллиптического дифференциального уравнения порядка $2m$:

$$Ku = \eta.$$

Под правильной граничной задачей автор понимает такую линейную краевую задачу для (1), что для всех функций u и v, удовлетворяющих граничным условиям задачи, квадратичная форма, соответствующая главной части билинейной формы $(-1)^m (Ku, v)$, полуограничена. Краевая задача называется сопряженно правильной, если она правильна и $(Ku, v) = (u, Kv)$ для указанных выше функций u, v. Граничные условия правильных и сопряженно правильных задач не выписываются. Сформулированы теоремы о разрешимости правильных краевых задач и теорема о полноте системы собственных функций сопряженно правильной задачи в случае самосопряженности оператора K.

М. И. Вишик

752. Теорема единственности для решений уравнения теплопроводности, принадлежащих классу L. Кампе де Ферье (Un théorème d'unicité pour les intégrales de l'équation de la chaleur appartenant à la classe L. Kampé de Feriet Joseph), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 23, 1527—1529 (франц.)

Переходом к трансформациям Фурье по x доказывается следующая теорема единственности:

Если $u(x, t) \in L(-\infty < x < \infty)$ при всех $t > 0$, $\lim_{t \to +0} \| u(x, t) \| = 0$, где норма понимается в метрике L, и если функция $u(x, t)$ имеет в полуплоскости $t > 0$ конечные в каждой точке u_t и u_{xx} такие, что u_t равно u_{xx}, и суммируема в любой полосе $0 < \theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2 < \infty$, то $u \equiv 0$.

О. А. Ладыженская

753. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 2, 133—135

Пусть $\omega_n(P)$, μ_n^2 — собственные функции и собственные значения задачи

$$\Delta u(P) + \mu^2 u(P) = 0 \quad (P \in D), \; u|_B = 0,$$

где B — граница конечной области D в m-мерном пространстве. Спектральной функцией оператора Лапласа называется функция

$$\theta(P, Q; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \omega_n(P)\, \omega_n(Q).$$

Наряду с ней рассматриваются функции:

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s \omega_n(P)\omega_n(Q),$$

$$\theta_s^*(P, Q; \mu) = \frac{2^s}{(2\pi)^{m/2}} \frac{\mu^{m/2-s}}{r^{m/2+s}} J_{m/2+s}(\mu r),$$

r — расстояние между P и Q. Автор сообщает, что для любой внутренней подобласти D_ε области D найдется такая постоянная C, что

$$\sum_{a < \mu_n \leqslant a+1} |\omega_n(P)\, \omega_n(Q)| < C\, a^{m-1} \quad (P, Q \in D_\varepsilon).$$

Далее приводятся асимптотические соотношения между функциями θ_s и θ_s^* в зависимости от значений s и m. Например, если целая часть числа s меньше, чем $m-1$, то

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \theta_s^*(P, Q; \mu) + O(\mu^{m-1-s}) \quad (P, Q \in D_\varepsilon).$$

Пусть $f(Q) \in L_2(D)$, $P \in D_\varepsilon$, $s \geqslant 0$, $c_n = \int_D f \omega_n \, dv$.

Через $R_s(P, \mu)$ обозначается среднее по Риссу порядка s разложения f по ω_n:

$$R_s(P, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \omega_n(P),$$

а через $R_s^*(P, s)$ — среднее по Риссу разложения в обычный m-кратный интеграл Фурье функции, равной $f(Q)$ для $Q \in D$ и равной нулю для других Q. Равномерно относительно точки $P \in D_\varepsilon$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu \to \infty} \{R_s(P, \mu) - R_s^*(P, \mu)\} = 0$$

для $s = (m-1)/2$. Кроме того, при $s > (m-1)/2$ приводятся оценки отклонения $R_s(P, \mu)$ от $R_s^*(P, \mu)$. Например, если целая часть числа $s \geqslant \frac{m-1}{2} + 1$, то при $\mu \to \infty$ и $P \in D_\varepsilon$

$$|R_s(P, \mu) - R_s^*(P, \mu)| < \frac{C_\varepsilon}{\mu}.$$

М. И. Вишик

754. Ряды фундаментальных функций и предельная задача для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Бюро (Les séries de fonctions fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Bureau Florent), Acta math., 1953, 89, № 1—2, 1—43 (франц.)

Проводится сравнительный анализ различных представлений решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu, \text{ где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)\, u,$$

удовлетворяющего условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$; $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$. На плоскости комплексного параметра s и в особенности в окрестности точки $s = 0$ изучается поведение функции

$$K_s(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k^s} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}},$$

где v_k — собственные функции оператора Lv, при помощи которой дается явное выражение для решения. Это выражение по существу есть обычное представление решения рядом Фурье.

Отметим следующую теорему: функция

$$\zeta_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k^s}$$

является целой функцией s при $x \neq y$; если же $x = y$, то ζ_s регулярна на всей плоскости s, за исключением точки $s = 1/2$, где она имеет простой полюс. *О. А. Ладыженская*

755. Об асимптотическом разложении решения одной краевой задачи. Панич О. И., Мат. сб., 1953, 32(74) : 2, 385—406

Пусть в неограниченном пространстве находится ограниченное тело T_i с поверхностью S. Требуется найти функцию u, удовлетворяющую уравнению $\Delta u + cu = 0$ ($c = 0$ вне T_i, $c = -k^2$ в T_i), непрерывную на S вместе с нормальными производными, имеющую в заданной точке P_0 особенность типа $1/4\pi R$ и обращающуюся в нуль на бесконечности.

К такой математической задаче сводится стационарная задача диффузии при наличии поглощения.

Полагая формально $c = \infty$, будем иметь $u = 0$ в T_i и $\Delta u = 0$ вне T_i. Пусть функция u_0 удовлетворяет указанным предельным уравнениям, условию непрерывности на S ($u_0|_S = 0$) и тем же условиям в точке P_0 и на бесконечности, что и u, т. е. функция u_0 есть решение предельной задачи.

Устанавливается связь между u и u_0.

1) Для достаточно гладких поверхностей S $\lim\limits_{k\to\infty} u = u_0$.

2) Вне T_i (т. е. в области T_e) возможно асимптотическое разложение функции u по степеням малого параметра $1/k$. Частичные суммы этого разложения u_1 и u_2, включающие члены первого и соответственно второго порядка малости относительно $1/k$, находятся как решения уравнения Лапласа для T_e при некоторых специальных краевых условиях на S, называемых условиями первого и второго порядка. Эти условия имеют вид

$$u_1\Big|_S = \frac{1}{k}\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S \quad \text{и} \quad u_2\Big|_S = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{\varkappa}{k}\right)\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_S,$$

где $\varkappa$ — средняя кривизна поверхности S в рассматриваемой точке.

Доказательство п. 2 подробно проведено для частичной суммы u_1. Указывается на возможность получения соответствующего предельного равенства для u_2. Результат обобщается на случай комплексного k ($\arg k^2 < \pi/2$).

Работа находится в тесной связи с другой работой автора (Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 4, 589—592), где рассмотрена аналогичная задача для уравнения колебаний $\Delta u + cu = 0$ ($c = k_i^2$ в T_i, $c = k_e^2$ в T_e) и для уравнений Максвелла. Эта задача связана с изучением диффракции электромагнитных волн на телах большой проводимости. *А. Б. Васильева*

756. О системе положительных интегралов уравнений Максвелла. Шехтер В., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 619—622

Рассматриваются решения системы уравнений Максвелла в конечной области Ω, ограниченной идеальным проводником. На любом таком решении сохраняет постоянное по времени значение интеграл энергии $\mathcal{E}_0(\vec{E}, \vec{H}) = \int_\Omega (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\, d\Omega$, а также производные от него интегралы $\mathcal{E}_l(\vec{E}, \vec{H}) = \mathcal{E}_0\left(\frac{\partial^l \vec{E}}{\partial t^l}, \frac{\partial^l \vec{H}}{\partial t^l}\right)$. Интегралы $\mathcal{E}_l$ преобразуются к виду, из которого можно заключить, что ограниченность $\mathcal{E}_l(\vec{E}, \vec{H})$, $l = 0, \ldots, k$, гарантирует равномерную по $t \in (-\infty, +\infty)$ ограниченность выражений

$$\int_\Omega \sum_{l=0}^{k} \sum_{\Sigma l_i = l} \left[\left(\frac{\partial^l \vec{E}}{\partial t^{l_0}\, \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_3^{l_3}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^l \vec{H}}{\partial t^{l_0}\, \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_3^{l_3}} \right)^2 \right] d\Omega.$$

В. И. Смирнов

757. Граничные задачи, связанные с тензорным уравнением Лапласа. Дафф (Boundary value problems associated with the tensor Laplace equation. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 196—210 (англ.)

Рассматриваются граничные задачи, относящиеся к гармоническим тензорам ранга p, определенным на римановых многообразиях M с границей B. Доказывается существование решений обобщенного уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

для граничных задач трех типов: задач, соответствующих задачам Дирихле, Неймана и смешанной задаче для скалярного уравнения Лапласа. Доказательство существования решения проводится при помощи сведения граничной задачи к системе сингулярных интегральных уравнений и доказательства разрешимости этой системы. Для граничной задачи третьего типа доказательство существования проведено при более сильных ограничениях на область M. Единственность решения в общем случае не доказана. Рассмотрена проблема собственных значений и доказано существование системы собственных функций. *Ю. Н. Днестровский*

758. Некоторые замечания о математической теории нагруженной упругой пластины, лежащей на упругом основании. Ливсли (Some notes on the mathematical theory of a loaded elastic plate resting on an elastic foundation. Lives-

l e y R. K.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, 6, ч. 1, 32—44 (англ.)

На основе известной гипотезы Винклера решается задача о равновесии упругой пластины, имеющей форму бесконечной плоскости или полуплоскости, лежащей на упругом основании и подверженной действию нормальной нагрузки. Рассмотрены различные типы краевых условий на границе полуплоскости. Решение строится при помощи интегралов Фурье. Рассмотрена также задача об изгибе бесконечной пластины под действием нагрузки, равномерно распределенной по некоторому прямоугольнику, который поступательно перемещается с постоянной скоростью. Для решения этой задачи автор вводит подвижные координаты и далее использует интеграл Фурье.

Некоторые из результатов реферируемой статьи давно известны. Так, Г. С. Шапиро (Докл. АН СССР, 1942, **37**, № 7—8,230—232) решил при помощи интегралов Фурье задачу о равновесии пластины в виде бесконечной полосы со свободным краем, лежащей на упругом основании. Как частные случаи Г. С. Шапиро получил отсюда решение задачи для бесконечной пластины, известное еще Герцу, и решение той же задачи для пластины в виде полуплоскости. *С. Г. Михлин*

759. Об одной граничной задаче для дифференциального уравнения

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+r\frac{\partial f}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=r^2k\frac{\partial f}{\partial t}\ .$$

Ф о р с т е р (Über eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+r\frac{\partial f}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=r^2k\frac{\partial f}{\partial t}\ .$$

F o r s t e r H e r b e r t), Math. Z., 1953, **57**, № 4, 423—455 (нем.)

Для уравнения (1), приведенного в названии работы (q^2 и k — положительные постоянные), решается смешанная задача в цилиндре $r\leqslant R$, $0\leqslant t<\infty$, при граничном условии $\left\{\zeta f+\frac{\partial f}{\partial r}\right\}_{r=R}=S(\varphi,t)$ ($\zeta=\text{const}$) и нулевом начальном условии. Вычитанием из f функции $g(r,\varphi,t)$, удовлетворяющей тому же граничному условию, что и f, и обращающей левую часть уравнения (1) в нуль, задача сводится к решению неоднородного уравнения (1) при однородных начальном и граничном условиях. Эта последняя задача (так же как и задача определения g) решается методом разложения в ряды Фурье по $e^{in\varphi}$ и функциям Бесселя. Проведено исследование сходимости получаемых при этом рядов.

Заметим, что наличие постоянного множителя $q^2\neq 1$ не вносит никаких принципиальных и вычислительных трудностей по сравнению с $q^2=1$, т. е. с обычной задачей теплопроводности для цилиндра. *О. А. Ладыженская*

760. О приближенном решении краевых задач в точке. Х у Ч ж а й - ч а н (On the approximate solutions of boundary value problems at a point. H u H a i - c h a n g), Sci. Record, 5, № 1—4, 59—68 (англ.)

Рассматривается уравнение $D\varphi=q$, где D — дифференциальный оператор; искомая функция φ подчинена некоторым краевым условиям. Вводится оператор, сопоставляющий функции φ некоторую функцию f; допускается, что через данную функцию q можно выразить f по формуле

$$f=\int_R gq\,dv\,,$$

где R — область, в которой ищется φ. Автор называет g функцией Грина.

Пусть штрих обозначает приближенное значение соответствующей величины, а буква δ — погрешность приближения. Полагая $q'=D\varphi'$, $\delta q=q'-q$, имеем

$$\delta f=\int_R g\delta q\,dv. \qquad (*)$$

Пусть еще g' означает некоторое приближение к функции Грина. Автор предлагает подчинить приближенное решение φ' условию

$$\int_R g'\delta q\,dv=0.$$

Тогда

$$\delta f=\int_R \delta g\delta q\,dv$$

и является, по мнению автора, величиной более высокого порядка малости, чем (*). *С. Г. Михлин*

761. Температурный переходной процесс в нагрузке при воздействии импульсом высокочастотного нагрева. Т о м а с (Temperature transients in a load during pulsed R. F. heating. T h o m a s A. B.), Proc. Instn. Radio Engrs Australia, 1953, **14**, № 1, 11—18 (англ.)

При кратковременном нагревании одного конца цилиндра (или бруса) распределение температуры вдоль цилиндра будет зависеть как от температуры, так и от длительности нагревания. При некоторых работах (например, при пайке коаксиального кабеля) важно не нагреть бо́льшую часть тела выше определенной температуры.

Автор выводит уравнения распространения тепла для этого случая и, используя аналогию между распространением тепла вдоль бруса и переходным процессом в электрической линии передачи с распределенными параметрами, сводит рассматриваемую задачу к задаче о распределении потенциала в линии передачи с последовательным сопротивлением R, шунтированным утечкой G и емкостью C на единицу длины, при включении в момент $t=0$ постоянного тока $i=I_0$. Предполагается, что индуктивность $L=0$. Уравнение и граничные и начальные условия для тока i имеют вид:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=RC\frac{\partial i}{\partial t}+RGi,$$

при $t<0$ $\quad i=0$ при всех x,
при $t=0$ и $x>0$ $\quad i=0$,
при $t>0$ и $x=0$ $\quad i=I_0$,
при $t>0$ и $x\to\infty$ $\quad i\to 0$.

Используя преобразование Лапласа и таблицы функций и их изображений, автор получает решение и проводит подробную проверку того, что найденные решения удовлетворяют граничным и начальным условиям.

Для того чтобы получить решение в случае им-

пульсного воздействия, берется разность таких решений со сдвигом во втором решении момента включения тока.

Далее автор применяет полученные результаты к конкретной задаче и находит мощность и длительность импульса, необходимые при спайке двух коаксиальных кабелей при помощи высокочастотного индукционного нагрева. *Я. И. Хургин*

762. Заметка о приложении вариационного принципа Швингера к уравнению Дирака для электрона. Мозес (A note on the application of Schwinger's variational principle to Dirac's equation of the electron. Moses H. E.), Quart. Appl. Math., 1953, 2, № 1, 111—118 (англ.)

При использовании принципа Швингера строится вариационный функционал для амплитуды рассеянной волны электрона $T(E; \eta; \tau; \eta'; \tau')$, где E — энергия электрона, η и η' — начальные и конечные направляющие косинусы распространения волны, τ и τ' — начальные и конечные спиновые числа. Если уравнение Дирака представляется в виде

$$H\psi = (H_0 + q)\,\psi = E\psi,$$

где H_0 — оператор свободного электрона, то функционал для амплитуды T имеет следующий вид:

$$\frac{1}{T}\{v, v'\} = \frac{\sum_\gamma \int v'(x, \gamma)\, qv(x, \gamma)\, dx}{B} - \frac{\sum_\gamma \int v'(x, \gamma)\left\{q \sum_{\gamma'} \int g(x, \gamma; x', \gamma')\, qv(x', \gamma')\, dx'\right\} dx}{B},$$

где

$$B = \left(\sum_\gamma \int v'(x, \gamma)\, q\chi(\gamma; E, \eta', \tau')\, e^{i|k|(x, \eta')}\, dx\right) \times \left(\sum_\gamma \int q^* \chi(\gamma; E, \eta, \tau)^* e^{-i|k|(x, \eta)}\, v(x, \gamma)\, dx\right),$$

$\chi(\gamma, E, \eta, \tau)\, e^{i|k|(x, \eta)}$ — плоские волны свободного электрона и $g(x, \gamma; x', \gamma')$ — функция Грина оператора $E - H_0$.

Функции сравнения v и v' аппроксимируют функции ψ и Λ соответственно, где Λ — решение сопряженного уравнения Дирака. *Ю. Н. Днестровский*

763. Функции Хопкинса X_n и Y_n, встречающиеся в теории диффракции. Вулф (The X_n and Y_n functions of Hopkins, occurring in the theory of diffraction. Wolf E.), J. Optical Soc. Amer, 1953, **43**, № 3, 218 (англ.)

В задачах диффракции около круглого отверстия и прямого угла большую роль играют функции Ломмеля

$$U_n(y, z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (y/z)^{n+2s} J_{n+2s}(z),$$

$$V_n(y, z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (y/z)^{-n-2s} J_{-n-2s}(z).$$

Рассматривая другие задачи диффракции, Хопкинс ввел функции

$$X_n(y, z) = y\frac{\partial U_n}{\partial y} \quad \text{и} \quad Y_n(y, z) = -y\frac{\partial V_n}{\partial y}.$$

Утверждается справедливость следующей теоремы «умножения»:

$$X_n(\alpha^2 y, \alpha z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)^s y^s}{2^{s+1}\, s!} \times \left[\frac{z^2}{y} U_{n-s-1}(y, z) + \alpha^2 y U_{n-s-1}(y, z)\right]$$

и аналогичной теоремы для $Y_n(y, z)$.

В. Д. Купрадзе

764 РЕЦ. Математические методы физики. Маделунг (Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Madelung Erwin, pp. 531, Illus., Springer-Verlag, W. Berlin, 1950, 11.88 doll.) [**Рецензия: Ларк-Хоровиц** (Lark-Horovitz Karl), Science, 1953, **117**, № 3040, 365 (англ.)]

765 РЕЦ. Задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Зауэр (Anfangswertprobleme bei partieller Differentialgleichungen. Sauer Robert, pp. XIII+ +239, Springer-Verlag, Berlin, 1952, 29 DM) [**Рецензии: Лайтхилл** (Lighthill M. J.), Proc. Phys. Soc., 1953, **668**, ч. 5, № 401, 437 (нем.); **Фурх** (Furch. R.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1953, **95**, № 8, 253 (нем.)]

766 РЕЦ. Введение в математическую физику. Хаустон (An introduction to mathematical physics. Houstoun R. A., pp. X+262, Blackie and Son, London, 1952, 25 s.) [**Рецензия: Мак-Комби** (McCombie C. W.), Research, 1953, **6**, № 5, 206 (англ.)]

См. также 532, 544 **РЕЦ**, 579, 593 **К**, 639, 645, 646, 707, 708, 771, 772, 784, 793 **РЕЦ**, 812, 846, 871, 882, 885, 895—901, 904, 911 **РЕЦ**, 912 **РЕЦ**, 935, 936, 940, 969

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

767. Обобщение одной теоремы Гурса и Хейвуда. Чжан Ши-сюнь (A generalization of a theorem of Goursat and Heywood. Chang Shin-hsun), Sci. Record, 5, № 1—4, 11—16 (англ.)

Обобщая теорему Гурса (Goursat E., C. r. Acad. sci., 1907, **145**, 752—754; см. также Гурса, Курс математического анализа, **3**, ч. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1934, 69—71) и Хейвуда (Heywood B., C. r. Acad. sci., 1907, **145**, 908—910), автор показывает, что если ряд $k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x, y)$ сходится в смысле сред-

него квадратического, то имеют место равенства

$$D_k(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} D_{k_n}(\lambda), \qquad D_{k_n}^*(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} D_{k_n}^*(\lambda),$$

где $D_k(\lambda)$ и $D_{k_n}(\lambda)$ — определители Фредгольма ядер $k(x, y)$ и $k_n(x, y)$, а $D_k^*(\lambda)$ и $D_{k_n}^*(\lambda)$ — видоизмененные определители Фредгольма тех же ядер, а именно

$$D_k^*(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \delta_k^{(n)}, \quad \text{где } \delta_k^{(0)} = 1,$$

$$\delta_k^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & k(\alpha_1, \alpha_2) \cdots k(\alpha_1, \alpha_n) \\ k(\alpha_2, \alpha_1) & 0 \quad \cdots k(\alpha_2, \alpha_n) \\ \cdots & \cdots \\ k(\alpha_n, \alpha_1) & k(\alpha_n, \alpha_2) \cdots 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n .$$

Г. Н. Положий

768. Видоизмененный метод решения интегрального уравнения Галлена и его применение к антеннам вблизи резонанса. К и н г (An alternative method of solving Hallén's integral equation and its application to antennas near resonance. K i n g R o n o l d), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 2, 140—147 (англ.)

В предыдущей работе автора (King R., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1952, **23**, 1174) было показано, что характеристики излучающей антенны можно получить из интегрального уравнения Галлена, являющегося интегральным уравнением 1-го рода,

$$\int_0^h I(z') \left[\exp(-j\beta_0 R_1)/R_1 + \exp(-j\beta_0 R_2)/R_2\right] dz' =$$

$$= -\frac{4\pi j}{\zeta_0}\left[C\cos\beta_0 z + \frac{1}{2} V_0 \sin\beta_0 z\right], \qquad (1)$$

если его представить в виде двух уравнений, разложив на действительную и мнимую части:

$$\int_0^h [I_r(z') K_c(z, z') - I_t(z') K_s(z, z')]\, dz' = \frac{4\pi}{\zeta_0} C' F_0(z), \qquad (2а)$$

$$\int_0^h [I_t(z') K_c(z, z') + I_r(z') K_s(z, z')]\, dz' = -\frac{4\pi}{\zeta_0}\left[C'' F_0(z) + \frac{1}{2} V_0 G_0(z)\right]. \qquad (2б)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R_1 = [(z - z')^2 + a^2]^{1/2}; \qquad R_2 = [(z + z')^2 + a^2]^{1/2},$$

$$K_c(z, z') = (\cos\beta_0 R_1)/R_1 + (\cos\beta_0 R_2)/R_2;$$

$$K_s(z, z') = -[(\sin\beta_0 R_1)/R_1 + (\sin\beta_0 R_2)/R_2];$$

$$I_z = I_r(z) + jI_t(z); \qquad C = C'' + jC'; \qquad \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

$\zeta_0 = 120\pi$ омов; V_0 — приложенное напряжение в центре антенны; a — радиус антенны; $F_0(z) \equiv \cos\beta_0 z$, $G_0(z) \equiv \sin\beta_0 z$. Предполагается, что $a \ll h$, $\beta_0 a \ll 1$.

Вместо уравнений (2а), (2б) удобно решать следующие:

$$\int_0^h [I_r(z') L_c(z, z') - I_t(z') L_s(z, z')]\, dz' = \frac{4\pi}{\zeta_0} C' F_{0z}, \qquad (3а)$$

$$\int_0^h [I_t(z') L_c(z, z') + I_r(z') L_s(z, z')]\, dz' = -\frac{4\pi}{\zeta_0}\left[C'' F_{0z} + \frac{1}{2} V_0 G_{0z}\right], \qquad (3б)$$

где

$$L_c(z, z') = K_c(z, z') - K_c(h, z'),$$

$$L_s(z, z') = K_s(z, z') - K_s(h, z'),$$

$$F_{0z} = F_0(z) - F_0(h), \quad G_{0z} = G_0(z) - G_0(h).$$

Вводя функции $g_j(z, z') = I_j(z')/I_j(z)$ и $W_j(z) = W_j + \sigma_j(z) = \int_0^h g_j(z, z') L_c(z, z')\, dz'$, $j = r, t$, где W_j — значение $W_j(z)$ в некоторой точке, можно получить уравнения:

$$I_r(z) = 4\pi C' F_{0z}/\zeta_0 W_r + [D_r(z) - E_t(z)]/W_r, \qquad (4а)$$

$$I_t(z) = -4\pi\left[C'' F_{0z} + \frac{1}{2} V_0 G_{0z}\right]/\zeta_0 W_t + [D_t(z) + E_r(z)]/W_t, \qquad (4б)$$

$$D_j(z) \equiv -I_j(z)\sigma_j(z) - \int_0^h [I_j(z') - I_j(z) g_j(z, z')] L_c(z, z')\, dz', \qquad (5а)$$

$$E_j(z) \equiv -\int_0^h I_j(z') L_s(z, z')\, dz' \qquad j = r, t. \qquad (5б)$$

Уравнения (4а, 4б) решаются методом итераций. Для антенны, находящейся в резонансе с приложенным напряжением, т. е. при $\beta_0 h = (2h + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в третьем приближении рассчитано входное сопротивление, причем расчет произведен для трех антенн, отличающихся относительной толщиной. Рассчитанные значения графически сравниваются с теоретическими кривыми, полученными из второго приближения, а также с экспериментальными данными. Как показывает сравнение, для относительно более тонкой антенны рассчитанное значение совпадает с экспериментальным. Для относительно более толстых антенн рассчитанные значения совпадают с экспериментальными лучше, чем значения, полученные из второго приближения.

П. П. Бирюлин

769. Фредгольмовы решения уравнений с частными интегралами. А б д у с с а л а м (Fredholm solutions of partial integral equations.

A b d u s s a l a m), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, ч. 2, 213—217 (англ.)

Доказывается возможность применения обычной теории интегральных уравнений Фредгольма для решения интегрального уравнения

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda_1 \int K_1(x_1, x_2, y_1) F(y_1, x_2)\, dy_1 +$$

$$+ \lambda_2 \int K_2(x_1, x_2, y_2) F(x_1, y_2)\, dy_2,$$

где $a \leqslant x_1, x_2, y_1, y_2 \leqslant b$ и K_1, K_2 — непрерывные функции своих аргументов. Этот же метод может быть применен для решения подобных интегральных уравнений с n переменными, когда ядра $K_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ действуют на m из них поочередно ($m < n$). *Г. С. Салехов*

770. Метод вырожденных ядер для одного класса уравнений в пространстве L_2. Ахмедов К. Т., Изв. АН Азерб. ССР, 1953, № 4, 27—34

Уравнение

$$u(x) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} \lambda^j K_j(x, y) f_j(y, u(y))\, dy = 0$$

имеет единственное решение с интегрируемым квадратом, если функции $f_j(s, z)$ и $K_j(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $K_j(x, y)$ — симметричные положительно определенные ядра, причем

$$0 < \int_0^1 \int_0^1 K_j^2(x, y)\, dx\, dy < +\infty \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

2) $f_j(y, z)$ суммируемы с квадратом при $y \in [0, 1]$ для любого фиксированного z, удовлетворяющего неравенству $|z| \leqslant L$, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль на оси y.

3) Функции $f_j(y, z)$ удовлетворяют условию Липшица по z почти всюду:

$$|f_j(y, z_2) - f_j(y, z_1)| < M_j |z_2 - z_1|,$$

где $M_j < \lambda_{j1}$, λ_{j1} — наименьшие характеристические числа ядер $K_j(x, y)$.

4) λ — действительный параметр, удовлетворяющий условию

$$\sum M_j \frac{|\lambda|^j}{\lambda_{j1}} < 1.$$

Отметим, что если в условии 4) числа $1/\lambda_{j1}$ заменить на $\sqrt{\int_0^1 \int_0^1 K_j^2(x, y)\, dx\, dy}$, то утверждение теоремы непосредственно получается из принципа сжатых отображений без предположения относительно симметрии и определенной положительности ядер, а также без условия $M_j < \lambda_{j1}$. *В. В. Немыцкий*

771. Замечания об одном классе полярных интегро-дифференциальных уравнений. Л е м а н (Bemerkungen zu einer Klasse polarer Integrodifferentialgleichungen. L e h m a n n N. J o a c h i m), Math. Nachr., 1953, 9, № 1—2, 45—50 (нем.)

Работа примыкает к работе автора (Math. Nachr., 1951, 5, 139—160). Рассматриваются уравнения

$$y(x) = \lambda(K(x, s), y(s)) + f(x),$$

$$(u, v) = \sum_{\nu, \rho=0}^{n} \left\{ \int u^{(\nu)}(x)\, v^{(\rho)}(x)\, d\sigma_{\nu\rho}(x) + \sum_{i,k} a_{\nu\rho}^{ik}\, u^{(\nu)}(x_i)\, v^{(\rho)}(x_k) \right\}.$$

Ядро $K(x, s)$ предполагается симметричным, а производная $\dfrac{\partial^{\nu+\rho}}{\partial x^\nu \partial s^\rho} K(x, s)$ $(\nu, \rho = 0, \ldots, n)$ равномерно непрерывной в области изменения аргумента (полная характеристика рассматриваемых функций в работе отсутствует). Предполагается далее, что $\langle u, v\rangle = (u(x), (K(x, s), v(s))) = (v(x), (K(x, s), u(s)))$, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ (при этом $(u, v) = (v, u)$ для рассматриваемого функционального многообразия). Опираясь на свои предыдущие результаты, автор доказывает несколько предложений, в частности, следующие предложения: если $K_{(4)}(x, s) \not\equiv 0$ (полагаем $K_{(n)}(x, s) = (K_{(n-1)}(x, \xi), K(\xi, s))$, $K_{(1)}(x, s) = K(x, s)$), то существуют собственные числа однородной задачи; эти числа действительны. Для функции вида $q(x) = \langle K(x, s), h(s)\rangle$ имеет место разложение

$$q(x) = \sum_{\nu} \langle q, y_\nu\rangle y_\nu(x) + d_0(x), \qquad (1)$$

при этом $(K(x, s), d_0(s)) = 0$, $(d_0, d_0) = 0$ и ряд (1) сходится абсолютно и равномерно вместе с рядами, получаемыми почленным дифференцированием до порядка n. *Я. Б. Лопатинский*

772. Применение метода мажорирующих функций к изучению некоторых рекуррентных систем интегро-дифференциальных уравнений. Ж е р м э (Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certains systèmes d'équations intégro-différentielles récurrentes. G e r m a y R. H.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, № 1, 13—18 (франц.)

При обычных предположениях об аналитичности правых частей доказываются существование и единственность аналитического решения задачи с начальными условиями для системы уравнений следующего вида:

$$\frac{dy_{j,n}}{dx} = F_{j,n}[x; y_{1,n}(x), \ldots, y_{r,n}(x); \ldots$$

$$\ldots y_{1,n+r}(x), \ldots, y_{p,n+r}(x); w_{j,n}^{(1)}(x), \ldots, w_{j,n}^{(k)}(x)],$$

$(i = 1, \ldots, p;\ n = 1, 2, \ldots)$,

где

$$w_{j,n}^{(l)} = \int_{x_0}^{x} f_{j,n}^{(l)}[x, s; y_{1,n}(s), \ldots, y_{r,n}(s); \ldots$$

$$\ldots y_{1,n+r}(s), \ldots, y_{p,n+r}(s)]\, ds.$$

Аналогичные результаты для случая $p = 1$ были получены автором ранее. *Л. А. Чудов*

773 РЕЦ. Практическое руководство по интегральным уравнениям. Бюкнер (Die praktische Behandlung von Integralgleichungen. Bückner H. (Ergebnis der angewandten Mathematik, Heft 1), VI+127 S.; 1 Abb., Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg, 1952, 18.60 DM.) [**Рецензия: Леман** (Lehmann N. J.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 3, 111 (нем.)]

774 Д. О спектре одного класса корреляционных интегральных уравнений. Номоконов М. К. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

См. также 532, 544 **РЕЦ**, 712 **Д**, 732, 757, 768 764 **РЕЦ**, 809, 814, 815, 830, 901

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

775. Дифференциальное и интегральное исчисления. Пределы π и e. Швиндт (Differential- und Integralrechnung. Die Grenzwerte π und e. Schwindt H.), Energie und Technik, 1953, **5**, № 2, 35—36 (нем.)

Краткие, общедоступно изложенные сведения о числах π и e, содержащие прикладные и исторические моменты. *В. Л. Гончаров*

776. Производная $\cos x$. Андерсон (The derivative of $\cos x$. Anderson A. G.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 255—256 (англ.)

777. Еще о теореме Тейлора на первом курсе. Николас (More on Taylor's theorem in a first course. Nicholas C. P.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 329—331 (англ.)

778. Заметка о суммах степеней синусов, косинусов и тангенсов. (Продолжение.) Родеха (Nota sobre suma de potencias de senos, cosenos y tangentes. (Continuación). G.-Rodeja F., E.), Euclides, 1953, **13**, № 145, 115—119 (исп.)

Начало см. РЖМат, 1953, реф. 284.

779. О критерии равномерной сходимости. Муле (Su un criterio di convergenza uniforme. Mulè Giovanni), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 43—44 (итал.)

780. Непрерывность. Выпуклые функции и кривые. Валирон (Continuité. Fonctions et courbes convexes. Valiron G.), Rev. math. spéc., 1953, **63**, № 8, 469—471 (франц.)

Методические замечания.

781. Средние величины. Ионеску (Valori medii. Ionescu H. M.), Rev. mat. şi fiz., 1953, **4**, № 3, 55—62 (рум.)

Элементарное введение в теорию средних величин.

782. Тригонометрическое среднее. Еклин (Trigonometrische Mittelwerte. Jecklin H.), Elem. Math., 1953, **8**, № 3, 54—60 (нем.)

Рассматриваются средние вида

$$M = \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right), \quad x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

где $\varphi(x)$ — функция обратная к $f(x)$. Сравниваются средние, порожденные функциями $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, и средние: арифметическое, квадратичное, геометрическое и гармоническое. Сравнение проводится в различных интервалах (x_1, x_n) изменения x_i.

Попутно автор обнаруживает одно ошибочное утверждение у Прателли (Pratelli A., Atti I^a Riunione sci. Soc. ital. Statistica. Pisa, 9, 1939).

Б. Я. Левин

783. Приближение двойных интегралов криволинейными интегралами. Брунк, Юинг (Line integral approximation of double integrals. Brunk H. D., Ewing G. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 287—295 (англ.)

Пусть R — ограниченная измеримая область плоскости, r и θ — полярные координаты, и функции $f(r, \theta)$, $g(r, \theta)$, $h(r)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(r, \theta)$ — непрерывная на замыкании $\bar{R}$ области R и периодическая относительно θ с периодом 2π;

2) $h(r)$ положительна почти всюду на $[0, a]$ и суммируема на $[0, a]$, где a — радиус круга с центром в начале координат, в котором находится $\bar{R}$;

3) $g(r, \theta) \equiv h(r) f(r, \theta)$.

Пусть, далее, Γ_α — спираль

$$\theta = \alpha \int_0^r h(u)\, du$$

и

$$I = \frac{1}{2\pi} \iint_R g(r, \theta)\, dr\, d\theta,$$

$$I^* = \frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma_\alpha \cap R} f(r, \theta)\, d\theta = \int_{\Gamma_\alpha \cap R} g(r, \theta)\, dr.$$

Доказываемая в работе теорема, в частности, содержит следующий результат:

Если область R ограничена конечным числом спрямляемых простых замкнутых кривых, то

$$I = \lim_{\alpha \to \infty} I^*,$$

независимо от выбора координат.

Рассматривается еще случай, когда $f(r, \theta) = f(\theta)$ зависит только от θ.

Назовем клином область, ограниченную двумя лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и непрерывной кривой $r = F(\theta)$, где $F(\theta)$ непрерывна, и усеченным клином — область, ограниченную лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и непрерывными кривыми $r = F(\theta)$ и $r = G(\theta)$.

Теорема. Если R допускает разбиение в счетную последовательность клиньев или усеченных клиньев с центрами в начале координат, то соответственно

$$|I - I^*| < \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

или

$$|I - I^*| < \frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta.$$

Теорема. Пусть R — круг радиуса $b < a$ и (b, θ_1) лежит на спирали Γ_α. Для того чтобы $I = I^*$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\theta_1}\int_0^{\theta_1} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta.$$

В частности, $I = I^*$, если спираль делает целое число оборотов в R. *Ю. К. Солнцев*

784. Преобразования лапласиана. Агнью (Transformations of the Laplacian. Agnew R. P.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 323—325 (англ.)

785. Теорема о риссовских средних значениях для интегралов с бесконечными пределами. Айзакс (M. Riesz's mean value theorem for infinite integrals. Isaacs G. L.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 2, № 110, 171—176 (англ.)

Пусть $g(t)$ — интегрируемая по Лебегу на сегменте $\omega \leqslant t \leqslant x$ функция и $0 < \alpha < 1$.

Известна следующая теорема М. Рисса (Riesz M., Acta Univ. Hungarical Szeged, 1923, **1**, 114—126; Verblunsky S., Proc. London Math. Soc., 1931, **32**, 163—199).

Если $u < \omega$ и

$$g_\alpha(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\nu^x (t-\nu)^{\alpha-1} g(t)\,dt,$$

то

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\omega^x (t-u)^{\alpha-1} g(t)\,dt\right| \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{\omega \leqslant \nu \leqslant x} |g_\alpha(\nu)|. \qquad (1)$$

Возникает вопрос о справедливости этой теоремы в предельном случае при $x \to \infty$.

В настоящей работе доказывается, что если $g(t)$ интегрируема по Лебегу на любом сегменте $\omega \leqslant t \leqslant T$, где ω фиксировано, $u < \omega$, $\nu > \omega$, то (1) имеет место при $x = \infty$ в предположении, что оба интеграла с бесконечными пределами, участвующие в (1), существуют. *И. М. Ганзбург*

786. Геометрическая сходимость. Кламкин (Geometric convergence. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 256—259 (англ.)

Дается геометрическая интерпретация итерационного процесса

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

на примерах функций $F(x) = \sqrt{k + x}$, $(2 + x)^{-1}$ и $\cos x$. *В. Л. Гончаров*

787. Исследование некоторых свойств непрерывного точечного преобразования отрезка на самого себя, имеющих применение в теории нелинейных колебаний. Лейбензон З. Л., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 3, 351—360

Пусть $f(x)$ — функция, дифференцируемая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; изучается поведение при $n \to \infty$ последовательности x_n, определяемой рекуррентным соотношением: $x_{n+1} = f(x_n)$ $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1)$. Обозначим $l = \underline{\lim}\, x_n$, $L = \overline{\lim}\, x_n$. После рассмотрения поведения последовательности x_n вблизи неподвижных точек (т. е. точек z, в которых $f(z) = z$) доказываются теоремы:

1) Если $l < L$, то на интервале (l, L) имеется по крайней мере одна неподвижная точка;

2) Если $l < L$ и $|f'(z)| > 1$ во всех неподвижных точках z, то существует пара точек z_1, z_2, для которых

$$l \leqslant z_1 < z_2 \leqslant L, \quad f(z_1) = z_2, \quad f(z_2) = z_1.$$

Более детально исследуется случай, когда $f(1)=1$, $f'(1) > 1$, каждое из уравнений $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$. $(f(x) \neq x)$ имеет не более двух решений, а функция $f(x)$ имеет не более одной точки относительного минимума. В качестве примеров рассматривается поведение важных при анализе прерывных систем автоматического регулирования последовательностей, определяемых рекуррентными соотношениями:

$$x_{n+1} = x_n + c(1 - bx_n)(1 - x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + c(1 - bx_n)[1 - (x_n + x_{n+1})/2],$$

$$x_{n+1}/(1 - ax_{n+1}) - x_n/(1 - ax_n) =$$

$$= c(1 - bx_n)[1 - (x_n + x_{n+1})/2],$$

при определенных предположениях о параметрах a, b, c.

Замечания референта. Теорема 1) легко обобщается на случай любой непрерывной функции $f(x)$. Не оговорено, что ряд утверждений относится только к невырожденным последовательностям. В случае 1 § 4 можно считать, что $f'(z) \geqslant 0$. В примере 3 неясен вопрос об однозначной определенности x_{n+1}. На стр. 358, строка 2 сверху, неравенство $1 - 2\sqrt{c} \leqslant c(b - 1)$ является излишним. В начале стр. 352 должно быть $\varepsilon > 0$.

Укажем на работу Хартри (Hartree D., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1949, **45**, № 2, 230—236), имеющую отношение к этим вопросам.

А. Д. Мышкис

788. Монотонные подпоследовательности. Крускал (Monotonic subsequences. Kruskal Joseph B., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 264—274 (англ.)

Даются доказательство, указанное М. Д. Крускалом, и обобщения следующей теоремы, принадлежащей Эрдёшу и Секерешу (Erdös P., Szekeres G., Compositio math., 1935, 2, 463—470):

Всякая последовательность n^2+1 вещественных чисел содержит монотонную подпоследовательность $n+1$ чисел (монотонность может быть нестрогой). При этом n^2+1 есть наименьшее число, обладающее этим свойством.

Обобщение на r-мерное евклидово пространство $E^{(r)}$ строится так: последовательность векторов $S=\{x_i\}_1^n$ называется монотонной, если все разности $x_{i+1}-x_i$ лежат в некотором, зависящем от S, полупространстве определяемом $(r-1)$-мерной гиперплоскостью H, проходящей через начало. Это определение равносильно следующему определению: проекции S на некоторое направление, а именно, перпендикулярное к H, образуют монотонную числовую последовательность.

Далее вводится функция $\Psi_r(n)$, равная наименьшему натуральному числу p, такому, что всякая последовательность p векторов содержит монотонную подпоследовательность n векторов.

Главный результат состоит в доказательстве неравенства $\Psi_r(2+r)\leqslant 2r+3$, причем для $r=1$, $r=2$ имеет место знак равенства.

Основной при доказательстве является следующая лемма:

Всякая последовательность $\{x_i\}_1^p$ в $E^{(r)}$ удовлетворяет по крайней мере одному из условий: либо она монотонна, либо

$$\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i(x_{i+1}-x_i)=0, \quad \text{где } \alpha_i>0.$$

Высказывается предположение, что всегда $\Psi_r(n)=rn+(n^2-n+1)$.

Если же назвать монотонной в $E^{(r)}$ последовательность векторов, у которых 1-е, 2-е, . . . , r-е координаты образуют монотонные числовые последовательности (часть этих последовательностей может возрастать, часть — убывать), то соответствующая функция $\Psi_r(n)$ равна n^2+1 (это неопубликованный результат Брёйна).

Основная теорема и теорема Брёйна обобщаются также на множества, в которых введены некоторые соотношения упорядоченности, быть может нетранзитивные. *М. К. Фаге*

789 К. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г. Н. Изд. 4-е (для высших учебных заведений), 528 стр., Гостехиздат, М., 1953

Задачник содержит 15 глав: 1) Понятие функции; 2) Понятие предела; 3) Производная и дифференциал; дифференциальное исчисление; 4) Исследование функций и кривых линий; 5) Определенный интеграл; 6) Неопределенный интеграл; интегральное исчисление; 7) Определенный интеграл (продолжение); несобственные интегралы; 8) Применения интеграла; 9) Ряды; 10) Функции нескольких переменных; дифференциальное исчисление; 11) Применения дифференциального исчисления; 12) Многомерные интегралы и кратное интегрирование; 13) Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности; 14) Дифференциальные уравнения; 15) Тригонометрические ряды.

Задачник составлен в том же плане, в котором излагается теоретический материал в учебнике А. Ф. Бермана «Курс математического анализа». Общее число задач, по сравнению с 1-м изданием, увеличено с 3897 до 4100. В ответах к задачам главы IV «Исследование функций и кривых линий» во 2-м издании исключены все графики исследуемых функций. Во 2-м издании задачника, так же как и в 1-м, в ответах имеется много опечаток.

Помещены излишне трудные задачи, однако из задачника всегда можно подобрать задачи по программе математики для втузов. *И. В. Матвеев*

790 РЕЦ. Дифференциальное исчисление (учебник для вузов). **Лузин Н. Н.**, изд. 3-е, 476 стр. с черт., Сов. наука, М., 1952; **Интегральное исчисление** (учебник для вузов). **Лузин Н. Н.**, изд. 3-е, 416 стр. с черт., Сов. наука, М., 1952 [**Рецензия:** О некоторых недостатках учебников акад. Н. Н. Лузина «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление». **Маргулис Б. Е.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 1(53), 208—211]

791 РЕЦ. Курс математического анализа. Берман А. Ф., изд. 6-е, ч. 1, 554 стр. с черт., 1950; ч. 2, 443 стр. с черт. 1951, Гостехиздат, М.— Л. [**Рецензия:** Еще о «Курсе математического анализа» А. Ф. Берманта. **Кордемский Б. А.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 1 (53), 205—208]

792 РЕЦ. Анализ. Мак Келви (Calculus. McKelvey Joseph Vance, pp. VI+405, The Macmillan Co., New York, 1951, 4.50 doll.) [**Рецензия: Рассел** (Russell Helen G.), Math. Mag., 1953, 26, № 4, 232 (англ.)]

793 РЕЦ. Высшая математика для практиков. Йос, Калуца (Höhere Mathematik für Praktiker. Joos G., Kaluza Th., 385 S., 6. Aufl., Johann Ambrosius Barth., Leipzig, 1952, Preis geb. 23.10 DM) [**Рецензия: Вебер** (Weber W.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1953, 95, № 8, 253 (нем.)]

794 РЕЦ. Элементарная математика. Вводный курс высшей математики. Виллерс (Elementarmathematik. Ein Vorkurs zur höheren Mathematik. Willers Fr. A., Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 1952, 260 S., 172 Bilder, Preis geb. 16 DM; brosch. 14 DM) [**Рецензия: Карль** (Karl), Nachrichtentechnik, 1953, 3, № 3, 144 (нем.)]

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

795. Применение теории итераций Вольтерра к гипергеометрическим функциям. Уэдел (Applications of Volterra's theory of composition to hypergeometric functions. Wedel Arnold

Marion), Iowa State Coll. J. Sci., 1953, 27, № 2, 275—276 (англ.)

Статья является рефератом диссертаций автора и не содержит доказательств. При помощи итераций Вольтерра

$$\int_x^y f(x, t)\, g(t, y)\, dt$$

из теоремы сложения для полиномов Чебышева

$$2T_n(x)\cdot T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)$$

получаются различные тождества для трансцендентных функций. В виде примера сформулирована следующая теорема.

Для $n \neq 0$, $m \neq 0$, $v > 0$, $r > 0$, $u > 0$,

$$2nm\sqrt{\pi}\int_x^y \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(n+i)(-1)^i}{\Gamma(n-i+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right) i!} \times$$
$$\times \left(\frac{t-x}{a}\right)^{(u+ir-1)/2} \cdot J_{u+ir-1}\left[2\sqrt{a(t-x)}\right] \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{m} \frac{\Gamma(m+j)(-1)^j}{\Gamma(m-j+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right) j!} \times$$
$$\times \left(\frac{y-t}{b}\right)^{(v+jr-1)/2} \cdot J_{v+jr-1}\left[2\sqrt{b(y-t)}\right] dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{n+m} \frac{\Gamma(n+m+i)(n+m)(-1)^i}{\Gamma(n+m-i+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot i!} \times$$
$$\times \left(\frac{y-x}{a+b}\right)^{(u+ir+v-1)/2} \cdot J_{u+ir+v-1} \times$$
$$\times \left[2\sqrt{(a+b)(y-x)}\right] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-m} \frac{\Gamma(n-m+i)(n-m)(-1)^i}{\Gamma(n-m-i+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot i!} \times$$
$$\times \left(\frac{y-x}{a+b}\right)^{(u+ir+v-1)/2} \cdot J_{u+ir+v-1} \times$$
$$\times \left[2\sqrt{(a+b)(y-x)}\right].$$

Приводится еще следующее утверждение:

Пусть

$$f^*g = \int_{a(x)}^{b(y)} f(x, t)\, g(t, y)\, dt,$$

где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ таковы, что интеграл существует. В предположении аналитичности $a(x)$ и $b(y)$ необходимым и достаточным условием справедливости ассоциативного закона

$$(f^*g)^*h = f^*(g^*h)$$

является условие: либо $a(x) = x$ и $b(y) = y$, либо $a(x) = c$, $b(y) = d$, где c и d — постоянные.

Ю. К. Солнцев

796. Теоремы разложения для G-функций. III. Мейер (Expansion theorems for the G-function. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1953, 56, № 1, 43—49; Indagationes math., 1953, 15, № 1, 43—49 (англ.)

Пусть m, n, p, q — целые числа, $q \geqslant 1$, $0 \leqslant n \leqslant p \leqslant q$, $0 \leqslant m \leqslant q$. Обобщенная гипергеометрическая G-функция определяется при $z \neq 0$ аналогично контурному интегралу Барнса (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, 2, Л.—М., 1934, 71):

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\right) =$$
$$= \int_C \frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)}\, z^s\, ds,$$

где $a_i - b_k \neq 1, 2, 3, \ldots$

Контур C, проведенный от $\infty - i\tau$ до $\infty + i\tau$ ($\tau > 0$), содержит внутри себя все точки b_j и b_{j+r} и не содержит ни одной из точек $a_j - r$ ($r = 1, 2, 3, \ldots$) (Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1946, 49, 227—237, 344—356, 457—469, 632—641, 765—772, 936—943, 1063—1072, 1165—1175; 1941, 44, 1062—1070). Две предыдущие части реферируемой статьи (Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1952, 55, № 4, 369—379; № 5, 483—487) содержат обзор рассмотренных автором ранее свойств G-функций и две предварительные теоремы. В части III выводится ряд различных достаточных условий для справедливости формулы

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1-c_j)}\, G_{p+l,q+l}^{m,n+l}\left(\lambda w \,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_l,\ a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q,\ d_1, \ldots, d_l \end{matrix}\right) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\, {}_{l+1}\Phi_l\left(\begin{matrix} -r, 1-c_1, \ldots, 1-c_l; \\ 1-d_1, \ldots, 1-d_l; \end{matrix} \lambda\right) \times$$
$$\times G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} 0, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q, r \end{matrix}\right),$$

где ${}_p\Phi_q$ — обобщенная гипергеометрическая функция типа

$${}_p\Phi_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} z\right) =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h \prod_{j=1}^{p}\{\alpha_j(\alpha_j+1)\ldots(\alpha_j+h-1)\}}{h!\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\beta_j+h)}.$$

Л. М. Глускин

797. Теоремы разложения для G-функций. IV. Мейер (Expansion theorems for the G-function. IV. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., A, 1953, 56, № 2, 187—193; Indagationes math., 1953, 15, № 2, 187—193 (англ.)

В четвертой части статьи (начало см. реф. 796) даны различные достаточные условия, при которых справедлива формула

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(d_j)}\,G^{m+l,n}_{p+l,q+l}\left(\lambda w\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,\ c_1,\ldots,c_l\\ d_1,\ldots,d_l,\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\,{}_{l+1}\Phi_l\left(\begin{matrix}-r,\ d_1,\ldots,d_l;\\ c_1,\ldots,c_l;\end{matrix}\ 1/\lambda\right)\times$$

$$\times\,G^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(w\,\middle|\,\begin{matrix}1-r,\ a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ \ldots,b_q\end{matrix}\right).$$

В случае $p=q$ эта теорема может быть получена из теоремы 3 третьей части статьи. *Л. М. Глускин*

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

798. Об ограниченных последовательностях. Щеглов М. П., Докл. АН СССР, 1953, 50, № 2, 145—147

Введем обозначения: $s_0, s_1, \ldots$ — ограниченная последовательность; $\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu$ и $\varphi(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu\exp(-\nu/u)$ — чезаровские и пуассоновские средние;

$$\underline{\lim}\,s_n=\underline{D}_0,\ \underline{\lim}\,\sigma_n=\underline{D}_1,\ \underline{\lim}\,\varphi(u)=\underline{D}_2,$$

где $n\to\infty$, $u\to\infty$ и верхние (нижние) черточки левой части соответствуют верхним (нижним) черточкам правой части каждого равенства;

$$\omega_{ij}=\underline{D}_i-\underline{D}_j\ (i>j),\quad \omega^{ij}=\overline{D}_i-\overline{D}_j\ (i<j),$$

$$\omega^i_j=\overline{D}^i-\underline{D}_j\quad (\text{всюду } i,j=0,1,2).$$

Тогда 1) все числа $\omega\geqslant 0$ и $0\leqslant\omega^2_2\leqslant\omega^1_1\leqslant\omega^0_0<\infty$ (Щеглов М. П., Мат. сб., 1951, 28 (70) : 2, 00000); 2) если $\omega^2_2=0$, то $\omega^1_1=0$ (см. Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951); 3) если $\omega_{10}=0$, то $\omega_{21}=0$; если $\omega^{01}=0$, то $\omega^{12}=0$.

Пусть, далее, $\delta=\sup(\omega'/\omega)$, где $\omega\neq 0$, ω, ω' берется каждое с фиксированными индексами i, j, а sup, здесь и в дальнейшем, берется по всем ограниченным последовательностям.

Тогда 4) δ принимает только значения 1, e, ∞. 5) $\sup(\omega^2_2/\omega^0_0)=1$, $\sup(\omega^1_1/\omega^2_2)=e$, $\sup(\omega^0_0/\omega^1_1)=\infty$. 6) Пусть $n_k\nearrow\infty$ и $n_{k+1}/n_k\to 1$. Тогда $\underline{\lim}\,\sigma_{n_k}=\underline{\lim}\,\sigma_n$ и если $\sigma_{n_k}\to S$, то $\sigma_n\to S$. 7) Пусть $u_k\nearrow\infty$ и $u_{k+1}/u_k\to 1$. Тогда $\overline{\lim}\,\varphi(u_k)=\overline{\lim}\,\varphi(u)$ и если $\varphi(u_k)\to S$, то $\varphi(u)\to S$. 8) Пусть для $\{s_n\}$ можно указать последовательность $u_k\nearrow\infty$ и подпоследовательность u_{k_s}, для которых: $\lim\varphi(u_{k_s})=S$, $\overline{\lim}\,u_{k+1}/u_k<\infty$, $\underline{\lim}\,u_{k_{s+1}}/u_{k_s}>1$, $u_{k+1}/u_k\to 1$ при $k\to\infty$ по $k\in\{[k_s,k_{s+1})\}$, где $s=0,2,4,\ldots$ Тогда $\sigma_n\to S$ (это предложение обобщает теорему Литлвуда).

Доказательства основываются на двух леммах: 1. Последовательность σ_n и функция $\varphi(u)$ медленно колеблются; 2. Для равенства $\omega_{10}=0$ необходимо и достаточно существование последовательности натуральных чисел $N^*=\{n^*_k\}$ такой, что $s_n\to\underline{D}_0$ по $n\in N^*$; N^* столь плотно покрывает сегменты $[n_k,n'_k]$, что $r_k/(n'_k-n_k)\to 1$, где r_k — число чисел $N^*\cap[n_k,n'_k]$; сегменты $[n_k,n'_k]$ не перекрываются и имеют длину, достаточную для $n'_k/n_k\to\infty$.

А. Л. Брудно

799. Замечание к одной теореме обращения Питта для лакунарных рядов. Мейер-Кёниг (Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt. Meyer-König Werner), Math. Z., 1953, 57, № 3, 351—352 (нем.)

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ называется суммируемым методом Бореля [суммируемым (B)] к значению s, если

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)\,x^\nu=s,$$

и суммируемым методом Эйлера порядка $p>0$ [суммируемым (E_p)] к значению s, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{pn}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n}{\nu}(2^p-1)^{n-\nu}(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)=s.$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ — лакунарный ряд, в котором $u_n=0$ при $n\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots$, где $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant\lambda\sqrt{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots$$

Известно, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ суммируем (B) и для всякого $\alpha>1$

$$u_n=O(\alpha^n)\quad (n\to\infty),\tag{1}$$

то он сходится (Pitt H. R., Proc. London Math. Soc., 1938, 44, 243—288). Автор доказывает, что утверждение этой теоремы остается справедливым, если условие (1) выполнено по крайней мере при одном значении $\alpha>1$. Отсюда выводится также аналогичная теорема для метода E_p.

М. Д. Калашников

800. Исследования по абсолютной суммируемости. Пейеримхофф (Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Peyerimhoff Alexander), Math. Z., 1953, 57, № 3, 265—290 (нем.)

Пусть A — нормальная треугольная матрица чисел $\{a_{nk}\}$, т. е. $a_{nn}\neq 0$, и B — некоторый метод суммирования рядов с матрицей $\{b_{nk}\}$, у которой

для каждого фиксированного значения k $b_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} b_{n\nu} \to 1$ при $n \to \infty$.

Последовательность s_n называется абсолютно лимитируемой методом A, если соответствующая преобразованная последовательность $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k$ абсолютно сходится, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - \sigma_{k-1}| < \infty$.

Изучается вопрос об условиях, которым удовлетворяет последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$, порождающая для всякой абсолютно лимитируемой методом A последовательности $\{s_n\}$ суммируемый методом B ряд $\sum_{k=0}^{\infty} s_k \varepsilon_k$. Если каждый столбец матрицы A образует абсолютно сходящуюся нуль-последовательность, то для этого необходимо существование ограниченной последовательности $\{\beta_n\}$ такой, что $\varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n (a_{nk} - a_{n-1,k})$ при любом k. Если, кроме того, матрица A обладает тем свойством, что при всяком k соотношение $\sum_{n=k}^{\infty} \beta_n (a_{nk} - a_{n-1,k}) = 0$, $\beta_n = O(1)$ равносильно тому, что $\beta_n = \text{const}$ и метод суммирования B перманентный, то данное условие становится не только необходимым, но и достаточным.

Подобные результаты имеют место также для абсолютно суммируемых методом A рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Следствием этих теорем является приведенный в работе для абсолютной суммируемости аналог известной теоремы Харди и Бора об условиях, при которых (C, α)-суммируемый ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ преобразуется в (C, α)-суммируемый ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_k$.

Даны также приложения этих результатов к отдельным конкретным методам суммирования: к методу взвешенных средних арифметических, к методу Вороного — Норлунда и, в частности, к методу (C, α), когда $0 < \alpha \leqslant 1$.

В процессе доказательства указанных утверждений автор получает некоторые оценки, связанные с рассматриваемыми при абсолютной суммируемости нормальными преобразованиями и устанавливает оценку в известном смысле точного порядка абсолютно лимитируемых определенными методами последовательностей. *А. Ф. Тиман*

801. О методе Рисса и родственных классах матриц преобразований. Юркат (Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Jurkat Wolfgang), Math. Z., 1953, 57, № 3, 353—394 (нем.)

Пусть A — нормальная треугольная матрица чисел $\{a_{nk}\}$, $(a_{nn} \neq 0)$, у которой каждый столбец образует нуль-последовательность и которая удовлетворяет теореме о среднем значении, т. е. для любой последовательности $\{s_\nu\}$ и всех $n \leqslant m$ при некотором n', зависящем от n, m и $\{s_\nu\}$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqslant K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \quad (n' \leqslant m). \qquad (1)$$

A называется матрицей, имеющей порядок g_n, если при любой монотонно возрастающей последовательности чисел η_n соотношению

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n) \text{ [соответственно } \sigma_n = O(\eta_n)] (*)$$

могут удовлетворять лишь такие s_n, для которых $s_n = o(\eta_n g_n)$ [соответственно $s_n = O[\eta_n g_n)]$.

Числа ε_n называются o-(соответственно O-)множителями сходимости матрицы A порядка η_n, если всякая последовательность $\{s_n\}$, удовлетворяющая условию (*), порождает сходящийся ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$.

Для указанных вначале матриц A даны необходимые и достаточные условия, при которых числа ε_n будут o-(соответственно O-)множителями сходимости, и соответствующие достаточные условия в некоторых более общих случаях. Устанавливается, что точный порядок всякой такой матрицы полностью определяется диагональными членами и равен $O(1 / a_{nn})$.

Этот факт распространяется на тот случай, когда A есть произведение конечного числа матриц данного типа с монотонно убывающими диагональными элементами, а также на случай, когда a_{nn} монотонно убывает и когда матрица $\Delta^r A$ чисел $\{\Delta_\nu^r a_{n\nu}\}$ обладает указанными выше свойствами при некотором целом $r \geqslant 0$ (через $\Delta_\nu^r a_{n\nu}$ обозначена r-я разность относительно индекса ν). Наконец, для случая, когда наряду с прочими ограничениями одна из матриц подчиняется неравенству (1) либо удовлетворяет другой теореме о среднем значении

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqslant K^* \sum_{\nu=0}^{n} \left| a_{m\nu} \right| \frac{\left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right|}{\sum_{\nu=0}^{n'} \left| a_{n'\nu} \right|}, \qquad (2)$$

а также для некоторых других случаев, приводится ряд утверждений, устанавливающих условия, при которых для данных двух матриц B и A и фиксированной положительной монотонно возрастающей последовательности η_n из соотношения $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$ (соответственно $O(\eta_n)$) вытекает, что $\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$ (соответственно $O(\eta_n)$).

Даны приложения этих теорем к рассматриваемым в работе так называемым общим методам суммирования Чезаро и соответствующим эквивалентным им методам Рисса. *А. Ф. Тиман*

802. О d_n-монотонной последовательности. Мо Е (On d_n-monotone sequence. Mo Yeh), Sci. Record, 5, № 1—4, 51—58 (англ.)

Пусть $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_n < \ldots \to +\infty$. Последовательность $\{a_n\}$ положительных чисел называется d_n-монотонной последовательностью, если для некоторого $\alpha \geqslant 0$

$$a_{n+1} \leqslant a_n \left(1 + \frac{\alpha}{d_n}\right) \text{ для всех } n \geqslant n_0(\alpha) > 0.$$

Если члены ряда $\sum_1^\infty a_n$ образуют d_n-монотонную последовательность, то его называют d_n-монотонным рядом. Доказываются следующие теоремы:

1) Пусть

$$\left[\frac{n}{p}\right] = k, \; d_n = O(n), \; \frac{d_n}{d_k} = O(1), \qquad (1)$$

где p—некоторое фиксированное число не меньшее 2. Если сходящийся ряд $\sum_1^\infty a_n$ является d_n-монотонным рядом, то $\lim_{n\to\infty} d_n a_n = 0$.

2) Если $\{d_n\}$ удовлетворяет условиям (1), $\{b_n\}$ является d_n-монотонной последовательностью, последовательность частных сумм ряда $\sum_1^\infty a_n$ ограничена и ряд $\sum_1^\infty \frac{b_n}{d_n}$ сходится, то $\sum_1^\infty a_n b_n$ сходится.

Этот результат является обобщением критерия Дирихле.

3) Если $\{d_n\}$ удовлетворяет условиям (1) и $\{a_n\}$ является d_n-монотонной последовательностью, то и последовательность $\{A_n\}$, где $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, будет также d_n-монотонной последовательностью. *В. Г. Челидзе*

803. Особенности матричных методов. Ц е л л е р (Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Einfolgenverfahren. Z e l l e r K a r l), Arch. Math., 1953, 4, № 1, 1—5 (нем.)

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ суммируема при помощи матрицы $A = (a_{l,k})$ к числу s или $A\text{-}\lim x_n = s$, если $\lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^\infty a_{l,k} x_k = s$. Множество $\{A\}$ A-суммируемых последовательностей назовем полем действия метода A. Два метода A и B будем называть непротиворечивыми, если на пересечении их полей действия $A\text{-}\lim x_n = B\text{-}\lim x_n$. Автор обнаруживает существование такого перманентного метода, которым существенно суммируется лишь одна расходящаяся последовательность.

Далее показывается, что для любого перманентного метода A существуют перманентные методы B и C, $\{A\} \subset \{B\} \subseteq \{C\}$ такие, что B непротиворечив с A, но не с C. Наконец, строится последовательность перманентных методов $F^{(r)}$, $\{F^{(r+1)}\} \subset \{F^{(r)}\}$ таких, что каждым методом $F^{(r)}$ суммируется по крайней мере одна расходящаяся последовательность, но никакая расходящаяся последовательность не принадлежит всем полям $\{F^{(r)}\}$.

К реферируемой статье примыкают работы Мазура (Mazur S., Math. Z., 1928, 28, 599—611) и Даревского (Изв. АН СССР, сер. мат., 1946, 10, 97—104).

Референтом замечены следующие опечатки: На стр. 1, 6 строка сверху, вместо $A \cap \mathfrak{B}$ должно быть $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$ и на стр. 2, 9 строка снизу, вместо $\mathrm{diag}(a^k)$ должно быть $\mathrm{diag}(d_k)$. *И. Е. Жак*

804. Обобщение теоремы Таубера и некоторые тауберовы константы. Р а д ж а г о п а л (A generalization of Tauber's theorem and some tauberian constants. R a j a g o p a l C. T.), Math. Z., 1953, 57, № 4, 404—414 (англ.)

Работа продолжает исследования по «тауберовым константам», цель которых — получение точных оценок для верхнего предела модуля разности между частными суммами бесконечного ряда (или интеграла) и его преобразованиями при различных линейных методах суммирования и тауберовых условиях типа «O».

Приводимая ниже основная теорема (теорема A) является обобщением результатов автора (Rajagopal C. T., Comment. math. helv., 1950, 24, 219—231) и Деланжа (Delange H., Ann. scient. École norm. supèr., сер. 3, 1950, 67, 99—160), но включает, в отличие от последних, такие методы суммирования, как метод Бореля.

Пусть $A(u)$ $(u \geqslant 0)$ — функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале. Рассмотрим ее Ψ-преобразование

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, u)\, A(u)\, du,$$

где $\psi(x, u) \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$ и достаточно больших значениях x. Пусть существует строго возрастающая неограниченная дифференцируемая функция $\Lambda(u)$ такая, что ($V(u)$ обозначает функцию, обратную $\Lambda(u)$)

$$\psi\{x, V(yu)\} \frac{\partial V(yu)}{\partial u} \to N(u) \quad (u > 0) \text{ при } x \to \infty,$$

где $y = f(x)$ — непрерывная строго возрастающая неограниченная функция. Тогда, при выполнении ряда дополнительных условий, наложенных на $\psi(x, u)$, из того, что

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \sup_{u \leqslant u' \leqslant U} |A(u') - A(u)| \leqslant K \log \lambda,$$

где $\Lambda(U) = \lambda \Lambda(u), \quad \lambda > 1$

(в левой части последнего равенства в работе вместо U ошибочно напечатано u), следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\Psi(x)-A\{V(f(x))\}\int_0^\infty \psi(x,u)\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^\infty N(u)\,|\log u|\,du.$$

Применяя эту теорему к случаю $\psi(x,u)=\frac{e^{-x}x^u}{\Gamma(u+1)}$, $\Lambda(u)=e^{\sqrt{u}}$, $y=f(x)=e^{\sqrt{x}}$, автор получает следующий результат:

Если $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ удовлетворяет условию $\overline{\lim}\sqrt{n}|a_n|=L<\infty$, то для преобразования Бореля

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(x,n)\,a_n,\quad\text{где}\quad\varphi(x,n)=e^{-x}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!},$$

имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|B(x)-A(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}L,\quad\text{где}\quad A(x)=\sum_{n=0}^{[x]}a_n,$$

причем знак равенства достигается (соответствующий пример сообщен автору Виджаярагованом).

Даются применения основной теоремы и ее упрощенного варианта (соответствующего случаю $\Lambda(u)=u$, $y=\alpha x$) к методам суммирования Рисса, Абеля, Ламберта и Стилтьеса. Эти результаты большей частью известны [см. цитированную работу Деланжа, а также Агнью (Agnew R. P., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 501—518)]. *Б. И. Коренблюм*

805. Некоторые интересные ряды, вытекающие из одного разложения в ряд Маклорена. Шпигель (Some interesting series resulting from a certain Maclaurin expansion. Spiegel M. R.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 4, 243—247 (англ.)

Выводится известное разложение

$$(\arcsin t)^2=t^2+\frac{2}{1\cdot3}\left(\frac{t^4}{2}\right)+\frac{2.4}{1.3.5}\left(\frac{t^6}{3}\right)+$$
$$+\frac{2.4.6}{1.3.5.7}\left(\frac{t^8}{4}\right)+\ldots\qquad(1)$$

(см. например, Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М. — Л., 1951, 65, где указаны также источники). Ряд (1) при $t=1$ превращается в ряд для $\pi^2/4$. Преобразованиями ряда (1) могут быть получены другие числовые ряды, например:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}+\left(\frac{2}{1\cdot3}\right)^2\frac{1}{5}+\left(\frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)^2\frac{1}{7}+\left(\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\right)^2\frac{1}{9}+\ldots,$$

$$\frac{11-2\pi\sqrt{3}}{24}=\frac{2}{1\cdot3\cdot5}\left(\frac{1}{2^5}\right)+\frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\left(\frac{1}{2^7}\right)+$$
$$+\frac{2.4.6}{1.3.5.7.9}\left(\frac{1}{2^9}\right)+\ldots,$$

$$\pi=4-\left\{\left(\frac{2}{1\cdot3}\right)^2+\left(\frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{2.4.6}{1.3.5.7}\right)^2\frac{1}{3}+\ldots\right\},$$

$$\pi=3+\left\{\left(\frac{1}{1\cdot3}\right)^2+\left(\frac{2}{1.3.5}\right)^2+\left(\frac{2.4}{1.3.5.7}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2.4.6}{1.3.5.7.9}\right)^2+\ldots\right\},$$

$$\frac{\pi^2}{2}-4=\left(\frac{2}{1\cdot3}\right)\frac{1}{1^2}+\left(\frac{2.4}{1.3.5}\right)\frac{1}{2^2}+\left(\frac{2.4.6}{1.3.5.7}\right)\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Большое количество аналогичных разложений было дано Рамануджаном (см. Ramanujan S., Collected papers., Cambridge, 1927, 15—17, 37—38). *В. И. Левин*

806 Д. Сингулярные двойные интегралы и суммирование двойных рядов методом Рисса. Габисония О. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Тбилисский гос. ун-т, Тбилиси, 1953

См. также 540, 541, 542 **РЕЦ**, 545 Д, 571, 613, 628 **РЕЦ**, 635, 644, 650, 656—658, 668, 673, 675, 676, 686, 698, 734, 763, 764 **РЕЦ**, 859 **РЕЦ**, 908, 912 **РЕЦ**, 913 **РЕЦ**. Таблицы специальных функций см. в подразделе «Таблицы».

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

807. Изучение кривизны выпуклых тел в банаховых пространствах. Лорх (A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Lorch E. R.), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, 34, 105—112

В вещественном банаховом пространстве B с элементами x, y, z,... поверхность выпуклого тела (т. е. ограниченного замкнутого выпуклого множества, имеющего нулевую точку O своей внутренней точкой), симметричного относительно O, может быть записана уравнением $\|x\|'=1$, где $\|x\|'$ есть новая метрика, эквивалентная данной метрике $\|x\|$ пространства B. Ставя своей целью изучение кривизны поверхности таких выпуклых тел, автор ограничивается поэтому рассмотрением кривизны единичной сферы S: $\|x\|=1$.

Определяются функции $G(x)=r^{-1}\|x\|^r$, где $r>1$, и $\varphi(\alpha,\beta)=G(x+\alpha y+\beta z)$, где α, β — вещественные переменные. Частные производные φ_α, φ_β, $\varphi_{\alpha\alpha}$, $\varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\beta\beta}$ при $\alpha=\beta=0$ предполагаются существующими и обозначаются $G_y(x),\ldots,G_{zz}(x)$. Это не что иное, как дифференциалы Гато функции $G(x)$ (см. напр., обзорную статью М. М. Вайнберга, Усп. мат. наук, 1952, 8, № 4 (50), 55—102). Если $\|x\|=\|y\|=1$, $G_y(x)=0$, то кривая

$$\|\alpha x+\beta y\|=1\qquad(*)$$

в прямоугольных координатах на (α,β)-плоскости имеет в точке $(\alpha=1,\ \beta=0)$ кривизну, равную $\varphi_{\alpha\alpha}(0,0)=G_{yy}(x)$. В пространстве B кривая $\|\alpha x+\beta y\|=1$ является пересечением единичной сферы

S с плоскостью, проходящей через точки O, x и прямую, проведенную через x в направлении вектора y; при этом точке (1, 0) кривой (*) соответствует данная точка $x \in S$. Таким образом, изучение кривизны S в точке x можно понимать как изучение функционала $G_{yy}(x)$ по разным направлениям y. Автор изучает более общий функционал $G_{yz}(x)$ от y и z при произвольном x (и функционал $G_y(x)$ от y) при условии положительности кривизны: $G_{yy}(x) > 0$ для всех $x \neq 0$, $y \neq 0$ (это условие не зависит от выбора $r > 1$).

Основные результаты: $G_y(x)$ как функция от y есть линейный функционал $l_x(y)$ в пространстве B, достигающий на S максимума при $y = \|x\|^{-1} \cdot x$ и имеющий норму $\|x\|^{r-1}$; при этом $l_{x'} \neq l_x$, если $x' \neq x$. Наоборот, если линейный функционал $l(y)$ достигает на S максимума в точке $y = x$, то $l(y) = \lambda \cdot G_y(x)$, где $\lambda > 0$ — некоторая постоянная. Далее, $G_{yz}(x) = C_{zy}(x)$ есть билинейный функционал от y, z и при закрепленном y функционал $f_y(z) = G_{yz}(x)$ ограничен. Если $x \neq 0$, то $f_{y'} \neq f_y$ при $y' \neq y$.

При более сильном требовании ограниченности кривизны снизу, т. е. при $G_{yy}(x) \geqslant L \cdot \|x\|^{r-2} \cdot \|y\|^2$ ($L > 0$ — постоянная), совокупность функционалов l_x в первом случае и f_y во втором случае совпадает со всем сопряженным пространством $\overline{B}$, и соответствия $x \to l_x$, $y \to f_y$ взаимно однозначны. При этом сфера S будет выпуклой, т. е. существует функция $\delta = \delta(\varepsilon)$ такая, что из $|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ следует $\|x + y\| \leqslant 2 - \delta$. Далее, первое соответствие сильно непрерывно в сторону $l_x \to x$; второе сильно непрерывно в сторону $y \to f_y$, а так как оно и линейно по y (первое не линейно по x), то, по известной теореме Банаха, оно будет и взаимно непрерывным, т. е. линейным изоморфизмом между B и $\overline{B}$.

При сильной ограниченности кривизны сверху, т. е. при $G_{yy}(x) \leqslant K \cdot \|x\|^{r-2} \cdot \|y\|^2$, соответствие $x \to l_x$ будет сильно непрерывным.

Таким образом, при двусторонней ограниченности кривизны соответствие $x \to l_x$ будет (нелинейным) гомеоморфизмом B и $\overline{B}$ (отображающим единичную сферу B на единичную сферу $\overline{B}$). Введением скалярного произведения $(y, z) = G_{yz}(x)$, $(x \neq 0)$, B превращается в гильбертово пространство с метрикой $\|y\|' = \sqrt{G_{yy}(x)}$, зависящей от каждого данного x и эквивалентной прежней метрике $\|y\|$.

[Обозначения S, l_x, f_y, $\|x\|'$, $\|y\|'$, $\overline{B}$ введены референтом]. *М. К. Фаге*

808. Принцип конденсации особенностей. Гал (The principle of condensation of singularites. Gál I. S.), Duke Math J., 1953, **20**, № 1, 27—35 (англ.)

В статье известный принцип конденсации особенностей Банаха-Штейнгауза для линейных операций обобщается на некоторый класс нелинейных операций. Статья является продолжением предыдущей работы автора (Ann. Inst. Fourier, 1951, **3**, 23—30), где аналогичное обобщение было сделано по отношению к теореме о равномерной ограниченности.

Автор называет последовательность ограниченных и однородных операций $u_n(x)$ в нормированном пространстве E асимптотически субаддитивной, если:

$$1)\ \|u_n(x+y)\| \leqslant \|u_n(x)\| + C\,\|u_n\|\,\|y\| \quad (\|x\| \leqslant 1;\ \|y\| \leqslant 1),$$

$$2)\ \|u_n(x+y)\| + \|u_n(x)\| \geqslant \|u_n(y)\| - \alpha(n, x)\,\|u_n\| \quad (\|x\| \leqslant 1;\ \|y\| \leqslant 1),$$

где $\alpha(n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого x. Применением метода Лебега устанавливается следующая теорема:

Если двойная последовательность операций $\{u_{mn}(x)\}$, определенных в полном пространстве E, при каждом фиксированном n асимптотически субаддитивна (относительно n) и для каждого m имеется такое $x_m \in E$, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|u_{mn}(x_m)\| = \infty$, то существует ξ независимое от m такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_{mn}(\xi)\| = \infty \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Как пример асимптотически субаддитивных операций автор приводит «среднеметрическую» интерполяцию, рассмотренную референтом (Мат. сб., 1934, **41**, 503; ссылка, данная в работе, ошибочна).

Л. В. Канторович

809. О собственных значениях и обратных особых значениях компактного линейного оператора в гильбертовом пространстве. Зильберштейн (On eigenvalues and inverse singular values of compact linear operators in Hilbert space. Silberstein J. P. O.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 201—212 (англ.)

Рассматривается линейный вполне непрерывный оператор K в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{k_n\}$ — последовательность собственных значений этого оператора, расположенных в порядке убывания их модулей, причем каждое из них содержится в последовательности столько раз, какова его кратность; $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n > 0$,— подобным же образом расположенная последовательность собственных значений самосопряженного оператора K^*K.

Показывается, что 1) если $\sigma_n = O\left(n^{-\rho} F_n^{-1}\right)$, где $\rho > 0$ и $\{F_n\}$ — неубывающая последовательность такая, что $\{F_n / n\}$ строго убывает, то

$$k_n = O\left(n^{-\rho} F_n^{-1}\right);$$

2) если

$$\sigma_n / \sigma_{[n\rho]} \leqslant A(\rho) \quad (n \geqslant n_0) \qquad (1)$$

для некоторого $\rho > 1$, то

$$|k_n| = O(\sigma_n);$$

3) если $\sigma_n = O(\mu_n)$, где $\{\mu_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (1), то

$$k_n = O(\mu_n).$$

Эти теоремы, в частности, усиливают один результат Хилле и Тамаркина (Hille E., Tamarkin

J. D., Acta math., 1931, 57, 1—76). Доказательства проводятся при помощи матричного представления оператора K в специально построенном базисе, связанном с собственными элементами оператора K.

В. И. Соболев

810. Квадратные корни из операторов. Халмош, Лумер, Шеффер (Square roots of operators. Halmos Paul R., Lumer Günter, Schäffer Juan J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 142—149 (англ.)

Как известно, обратимая матрица A над полем комплексных чисел допускает извлечение квадратного корня, т. е. представление в виде $A = B^2$. В статье решается (отрицательно) вопрос о возможности обобщения этого предложения на ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве (г. п.).

В качестве реализации г. п. принимается пространство H функций комплексного переменного z, определенных и регулярных в связной ограниченной открытой области D комплексной плоскости с интегрируемым по D относительно плоской лебеговой меры $\mu(z)$ квадратом модуля и скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \int_D \varphi(z)\,\overline{\psi(z)}\,d\mu(z)$.

Вводится класс $K(D)$ операторов A умножения на z ($A\varphi = z\varphi(z)$), которые по аналогии с квантовомеханической терминологией авторы называют аналитическими операторами положения (а. о. п.), ассоциированными с D.

Как известно, спектр $\sigma(T)$ любого линейного ограниченного оператора в г. п. состоит из трех непересекающихся частей: непрерывной $\alpha(T)$, точечной $\beta(T)$ и остаточной $\gamma(T)$; при этом $\overline{\gamma}(T) = \beta(T^*)$ (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 48).

Для $A \in K(D)$ установлено включение $D \subset \gamma(A) - \{\alpha(A) + \beta(A)\}$ и доказано, что при $\lambda \in \gamma(A)$ число $\overline{\lambda}$ является простым собственным значением оператора A^* (теорема 1), откуда следует

Теорема 2. Пусть $\sqrt{D}$ обозначает множество точек λ таких, что $\lambda^2 \in D$. Тогда для существования корня квадратного из оператора $A \in K(D)$ необходимо и достаточно, чтобы область $\sqrt{D}$ не была связной.

Отсюда следует, что приведенное вначале предложение об обратимых матрицах не обобщается на случай операторов в г. п., ибо а. о. п., ассоциированный с кольцевой областью, имеющей центр в точке $z = 0$, обратим, но не допускает извлечения квадратного корня.

И. М. Глазман

811. Об абстрактной задаче Коши. Хилле (Sur le problème abstrait de Cauchy. Hille Einar), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 15, 1466—1467 (франц.)

Пусть X — комплексное пространство Банаха, U — линейный оператор в X. Автор называет задачу отыскания n раз дифференцируемой по t в сильном смысле функции $y(t)$, удовлетворяющей условиям

$$U^n[y(t)] = y^{(n)}(t) \quad (t > 0), \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to 0} \| y^{(k)}(t) - y_k \| = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$y_k \in X$, абстрактной задачей Коши порядка n. $y(t)$ называется нулевым решением, если все $y_k = 0$ и $y(t) \not\equiv 0$. Решение называется нормального типа ω, если

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1} \ln \| y^{(n-1)}(t) \| = \omega < \infty.$$

Пусть $\sigma > 0$. Обозначим через $D_{n,\sigma}$ область

$$|\lambda|\,[\cos(1/n \arg \lambda)]^n > \sigma.$$

Ранее автор доказал, что если оператор U^n замкнут и если его собственные значения не образуют ни в одной из областей $D_{n,\sigma}$ плотное множество, то абстрактная задача Коши порядка n имеет не более одного решения нормального типа.

В реферируемой заметке приводятся некоторые соображения о неединственности решения абстрактной задачи Коши. В частности, отмечается, что когда оператор U^n замкнут, необходимое и достаточное условие для существования нулевого, нормального типа ω решения уравнения (1) состоит в том, чтобы собственные значения оператора U^n образовывали плотное в области $D_{n,\omega}$ множество и чтобы уравнение

$$U^n[x(\lambda)] = \lambda^n x(\lambda)$$

имело ограниченное, голоморфное решение в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant \omega + \varepsilon$. Указывается на связь абстрактной задачи Коши с уравнением Фоккера — Планка.

Б. М. Левитан

812. О разложениях по собственным функциям. Маутнер (On eigenfunction expansions, Mautner F. I.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 1, 49—53 (англ.)

Рассматривается комплексное гильбертово пространство функций, заданных на некотором множестве X с интегрируемым квадратом относительно меры dx. Дано спектральное семейство $P(E)$, где E пробегает некоторое σ-поле $\mathfrak{E}$ подмножеств пространства $\mathfrak{X}$; ($P(E)$ является спектральным семейством, если $P(E)$ отображает E на подмножество H так, что $E \to P(E)$ есть σ-автоморфизм булевской алгебры множеств $\mathfrak{E}$ в булевскую алгебру операторов $P(E)$).

Ставится задача нахождения такого семейства функций $s_r(x, y)$, определенных на $X \times \mathfrak{X}$, и мер $m_r(E)$, чтобы, если положить для каждого $f(x) \subset H$, $\hat{f}_r(y) = \int_X s_r(x, y) f(x)\,dx$, оказалось выполненным «равенство Парсеваля»

$$\int_X |f(x)|^2\,dx = \sum_r \int_{\mathfrak{X}} |\hat{f}_r(y)|^2 dm_r(y),$$

а функции $s_r(x, y)$ были бы при фиксированных r и y собственными функциями спектрального семейства. Понятие «собственная функция» автор предполагает уточнять в каждом конкретном случае.

Взяв произвольно $g_r \subset H$, построим пространство H_r, являющееся замыканием элементов вида Bg, где B пробегает совокупность полиномов от $P(E)$. При помощи обычного процесса ортогонализации

можно представить H в виде $H=\sum_r H_r$. Полагая $m_r(E)=(P(E)g_r, g_r)$, получим для любого $f_r\subset H_r$ представление в виде $f_r=\int_{\mathfrak{N}}\hat{f}_r(y)\,d[P(y)g_r]$ и

$$\|f\|^2=\sum_r\|f_r\|^2=\sum_r\int_{\mathfrak{N}}|\hat{f}_r(y)|^2\,dm_r(y).$$

Нужно показать, что $g_r(x, E)=(P(E)g_r)(x)$ дифференцируемо по $m_r(y)$, и тогда искомым семейством $\hat{s}_r(x, y)$ будет $\frac{dg_r(x, E)}{dm_r(E)}$. Это удается сделать, если спектральное семейство $P(E)$ есть спектральное семейство гипермаксимального (самосопряженного) оператора A такого, что для некоторого комплексного c оператор $(Ic-A)^{-1}$ является интегральным оператором с ядром Карлемана. Указанные результаты прилагаются к получению спектральных теорем для обыкновенных дифференциальных операторов. Доказательства только намечены.

А. Я. Повзнер

813. О существенном спектре симметрических операторов в гильбертовом пространстве. Хартман (On the essential spectra of symmetric operators in Hilbert space. Hartman Philip), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 229—240 (англ.)

Дается обобщение ряда результатов, известных для спектров обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (Weyl H., Math. Ann., 1910, **68**, 222—269; Hartman P., Wintner A., Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1947, **33**, 376—379; Amer. J. Math., 1948, **70**, 309—316; 1949, **71**, 650—652, 865—878; 1950, **72**, 545—552, 775—791), на случай самосопряженных расширений замкнутого симметрического оператора T.

Приведем некоторые результаты, полученные автором.

1. Пусть A — самосопряженное расширение оператора T с индексом дефекта (m, m); $p(\lambda, A)$ и $c(\lambda, A)$ — кратности точки λ соответственно в дискретном и непрерывном спектрах оператора A. Положим $\pi(\lambda)=\min_A p(\lambda, A)$, $\gamma(\lambda)=\min_A c(\lambda, A)$, где минимум берется по всем самосопряженным расширениям оператора T. Тогда имеют место неравенства $\pi(\lambda)\leqslant p(\lambda, A)\leqslant\pi(\lambda)+m$; $\gamma(\lambda)\leqslant c(\lambda, A)\leqslant\gamma(\lambda)+m$.

2. Пусть $l\,(-\infty<l<\infty)$ — точка регулярности для двух самосопряженных рисширений A_1, A_2; E_l — оператор проектирования на многообразие элементов x, удовлетворяющих уравнению $(T^*-lI)x=0$. Тогда $D=(A_2-lI)^{-1}-(A_1-lI)^{-1}$ — ограниченный самосопряженный оператор, коммутирующий с E_l. Если $l\,(-\infty<l<\infty)$ — точка регулярности одного расширения A_1, а D — ограниченный самосопряженный оператор, коммутирующий с E_l, то существует расширение A_2 такое, что $(A_1-lI)^{-1}+D=(A_2-lI)^{-1}$.

Под существенным спектром самосопряженного оператора автор понимает множество всех конечных точек сгущения спектра, включая точки дискретного спектра бесконечной кратности. В случае $m<\infty$ существенные спектры всех самосопряженных расширений совпадают. В случае $m=\infty$ доказывается, что если $\lambda=\mu$ принадлежит существенному спектру одного из расширений оператора T, то $\lambda=0$ принадлежит существенному спектру самосопряженного оператора $(T-\mu I)(T^*-\mu I)$. Если же $\lambda=0$ принадлежит существенному спектру самосопряженного оператора $(T^*-\mu I)(T-\mu I)$, то $\lambda=\mu$ принадлежит существенному спектру любого самосопряженного расширения оператора T.

Следует отметить, что аналогичные результаты о независимости непрерывного спектра от выбора расширения в случае $m<\infty$ и теоремы о кратности собственных значений содержатся в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана (Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М.—Л., 1950, 340—344). *М. С. Лившиц*

814. Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 4, 601—604

Изучаются условия полной непрерывности и дифференцируемости оператора Гаммерштейна

$$H\varphi=\int_G K(x, y)f(y, \varphi)\,dy, \qquad (1)$$

где G — компактное множество n-мерного пространства. Утверждается, что развитая в работе теория позволяет в случае быстро растущих по u функций $f(x, u)$ (например, типа e^u, e^{u^2}) устанавливать полную непрерывность $H\varphi$ в шаре некоторого пространства Орлича, а также при помощи метода неподвижных точек устанавливать теоремы существования и исследовать собственные функции для нелинейных интегральных уравнений вида $\varphi=\lambda H\varphi$.

Сложность, а также отсутствие объяснений обозначений делают чтение этой работы возможным лишь при знакомстве с предыдущими работами авторов (Докл. АН СССР, 1951, **81**, № 4,497—500; 1952, **85**, № 1, 33—36). В качестве конкретного приложения развитой теории приводится следующая теорема:

Пусть существуют такое $p>2$, что

а) $\int_G\int_G|K(x, y)|^p\,dx\,dy<\infty$;

б) $|f(x, u)|<a(x)+b|u|^{p-1}$

$\left(a(x)\in L^{\frac{p}{p-1}},\ b>0\right)$;

в) $|f(x, u)-f(x, 0)-f'_u(x, 0)u|\leqslant$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|u|^{\alpha_i}\varphi_i(x)+b|u|^{p-1}$$

$$\left(1<\alpha_i<p-1;\ \varphi_i(x)\in L^{\frac{p}{p-1-\alpha_i}}\right).$$

Тогда вполне непрерывный оператор (1) имеет в нуле θ пространства L^p производную Фреше $D=Af_1$. Формулировки теорем, содержащихся в работе, мы не приводим ввиду сложности принятых авторами обозначений. *В. В. Немыцкий*

815. Градиентные отображения. Рот (Gradient mappings. Rothe E. H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 1, 5—19 (англ.)

Пусть E — действительное пространство Банаха, $I = I(x)$ — функционал, определенный в E и имеющий непрерывный дифференциал Фреше. Это значит, что существует линейный по h функционал $l_x(h) = D(x, h)$, $(x, h \in E)$, непрерывно зависящий от x и порожденный равенством $I(x+h) - I(x) = D(x, h) + R(x, h)$, где $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{R(x,h)}{\|h\|} = 0$. Дифференциал Фреше порождает оператор $g(x) = \operatorname{grad} I(x)$, относящий каждому элементу $x \in E$ элемент $g(x)$ сопряженного к E пространства E^*.

Среди рассмотренных примеров отметим следующие:

1) Если E — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \max|x(t)| + \max|x'(t)|$ и

$$I(x) = \int_0^1 f(t, x(t), x'(t))\,dt,$$

то при определенных ограничениях, налагаемых на f,

$$l_x(h) = h(t) f_{x'}(t, x(t), x'(t))\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 h(t)\left\{-\frac{d}{dx} f_{x'} + f_x\right\} dt.$$

2) Возьмем функционал Гаммерштейна

$$i(x) = \int_D \int_D K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt + I(x),$$

где

$$I(x) = \int_D \left\{ \int_0^{y(t)} f(t, u)\, du \right\} dt,$$

$$y(t) = \int_D K(s, t)\, x(s)\, ds$$

и где D — ограниченная область евклидова пространства $s = (s_1, \ldots, s_n)$, а $K(s, t)$ — положительно определенное симметрическое ядро, удовлетворяющее условию

$$\int_D \int_D K^2(s, t)\, ds\, dt < \infty;$$

пусть, кроме того, либо ядро $K(s, t)$ ограничено, либо величина $|f|$ ограничена линейным функционалом от x с коэффициентом, не зависящим от t. Тогда $\operatorname{grad} i(x)$ представляет собой нелинейный оператор Гаммерштейна.

Если функционал $i(x)$ достигает экстремума во внутренней точке шара $V = V_R$, $V_R = (\|x\| \leqslant R)$, банахова пространства E, то $\operatorname{grad} i(x) = 0$. Когда экстремум достигается на границе S_R шара V_R из гильбертова пространства, то существуют постоянная λ и $x \in S_R$ такие, что $g(x) + \lambda x = 0$. Далее устанавливается, что если $I(x)$ — непрерывный функционал в смысле слабой топологии Алаоглу (Alaoglu L.) и n — целое, то $i(x) = \|x\|^n + I(x)$, где $\|x\|^n$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, достигает минимума в V_R. Для слабой непрерывности $I(x)$ в банаховом пространстве достаточно полной непрерывности его градиента. Если градиент функционала не является вполне непрерывным оператором, иногда можно введением новой нормы сделать градиент вполне непрерывным и, следовательно, порождающий функционал — слабо непрерывным. В конце работы устанавливается теорема существования интегрального оператора Гаммерштейна при помощи критических точек соответствующего функционала $i(x)$ и индекса Лерэ — Шаудера.

Доказательство основывается на введении новой нормы, относительно которой функционал Гаммерштейна $i(x)$ является слабо непрерывным.

Э. С. Цитланадзе

816. Линейные формы в кольце операторов. Диксмье (Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs. Dixmier J.), Bull. Soc. math. France, 1953, 81, № 1, 9—39 (франц.)

Описывается теория слабо замкнутых колец операторов (в дальнейшем речь идет только о таких кольцах); по кругу идей статья связана с известными работами Меррея и Неймана и рядом предыдущих работ автора. Рассматриваются линейные отображения двустороннего идеала m кольца M в другое кольцо N (в частности, числовые линейные функции, определенные на m) и изучаются условия непрерывности этих отображений в различных топологиях в M. Из этих топологий наибольший интерес представляют так называемые «сильнейшая» и «слабейшая» топологии, в которых окрестности определяются соответственно при помощи функционалов вида

$$F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \|Ax_i\|^2, \qquad \Phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax_i, y_i),$$

где

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < +\infty.$$

Один из основных результатов статьи состоит в том, что этим топологиям можно дать следующее чисто алгебраическое определение. Линейное отображение $A \to \theta(A)$ называется положительным, если из $A \geqslant 0$ следует $\theta(A) \geqslant 0$, и нормальным, если, кроме того, для любого направленного возрастающего множества $F \subset m$ из $A = \sup F$ вытекает, что $\theta(A) = \sup \theta(F)$.

Оказывается, что линейная положительная функция непрерывна в сильнейшей или слабейшей топологии тогда и только тогда, когда она нормальна. Отсюда автор получает ряд результатов, гарантирующих слабую замкнутость алгебраического кольца. В частности, всякий $*$-изоморфизм кольца M на кольцо N непрерывен в сильнейшей и слабейшей топологиях и образ кольца M при любом нормальном $*$-гомоморфизме есть также кольцо; отсюда же вытекает, что понятие подкольца является чисто алгебраическим.

Понятия непрерывности в сильной и слабой топологиях, вообще говоря, не являются чисто алгебраическими; однако автор показывает, что в некоторых кольцах сильная топология совпадает с сильнейшей и потому допускает алгебраическое определение. Таким является, например, кольцо M, для которого M' есть фактор бесконечного класса. Далее, исходя из нормального следа $\varphi(A)$, заданного на некотором идеале $m \subset M$, автор определяет нормированные пространства L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, являющиеся некоммутативным аналогом обычных пространств L^p, и получает для них ряд результатов, обобщающих известные свойства обычных пространств L^p. Так, например, имеют место неравенства Гёльдера и Минковского; при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ пространства L_p и L_q сопряжены друг другу.

В заключение по данным следу и подкольцу строится разложение исходного кольца в прямую сумму пространств, ортогональных по отношению к следу, и изучаются свойства этого разложения.

Отметим опечатки: на стр. 23, 7-я строка снизу напечатано $\frac{1}{p}+\frac{9}{1}+\ldots+\frac{1}{r}=1$ вместо $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{r}=1$.

М. А. Наймарк

817. Теория возмущений для полугрупп линейных операторов. Филлипс (Perturbation theory for semi-groups of linear operators. Phillips R. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 2, 199—221 (англ.)

Как известно, полугруппой линейных операторов называется функция $T(s)$, $s \in \mathfrak{S}$, значениями которой являются ограниченные линейные операторы в некотором комплексном пространстве Банаха $\mathfrak{X}$ и которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $T(0)=1$; $T(s_1+s_2)=T(s_1)\,T(s_2)$, $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}$;

2) $T(s)$ — сильно непрерывная функция на $\mathfrak{S}$.

В реферируемой статье $\mathfrak{S}$ может быть полупрямой $[0, \infty)$ или прямой $(-\infty, \infty)$, или сектором $\Phi_1 < \arg s < \Phi_2$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \Phi_1 < 0 < \Phi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, или же всей комплексной плоскостью.

Известно также, что при этих условиях существует, и притом только один, замкнутый линейный оператор A в $\mathfrak{X}$, определенный на плотном множестве $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$, и такой, что при $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$\frac{dT(s)\,x}{ds} = AT(s)\,x;$$

об операторе A говорят, что он порождает полугруппу $T(s)$.

В статье изучаются изменения, которые претерпевает полугруппа, когда к ее порождающему оператору A прибавляется ограниченный оператор. Автор называет устойчивыми те свойства полугруппы, которые сохраняются при таком прибавлении ограниченного оператора. При этом, в основном, рассматривается случай $\mathfrak{S}=[0, \infty)$. Прежде всего выясняются необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор A, чтобы он порождал полугруппу. С использованием этих условий доказывается, что если оператор A порождает некоторую полугруппу $T(s)$, а оператор B ограничен, то $A+B$ также порождает некоторую полугруппу $S(s)$, причем

$$S(s)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(s), \quad \text{где} \quad S_0(s)=T(s),$$

$$S_n(s)\,x=\int_0^s T(s-\sigma)\,BS_{n-1}(\sigma)\,x\,d\sigma.$$

Таким образом, свойство порождать полугруппу является устойчивым. Другими устойчивыми свойствами являются: а) соблюдение неравенства типа $\|T(s)\| \leqslant \exp(\omega s)$; б) непрерывность в смысле нормы оператора при $s>0$; в) голоморфность $T(s)$ в секторе $\Phi_1 < \arg s < \Phi_2 \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \Phi_1 < 0 < \Phi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и ограниченность вблизи начала координат в каждом подсекторе $\Phi_1+\varepsilon < \arg s < \Phi_2-\varepsilon$; г) вполне непрерывность (или слабая вполне непрерывность) резольвенты оператора A.

С другой стороны, приводятся примеры, показывающие, что следующие свойства являются неустойчивыми: а) $T(s)$ — обобщенный нильпотентный оператор при всех s; б) собственные и главные векторы оператора A порождают все пространство $\mathfrak{X}$.

Некоторые из результатов статьи автор обобщает на тот случай, когда ограниченный оператор B, прибавляемый к A, зависит от s.

В статье имеются опечатки: на стр. 207 (строки 3 и 5 сверху) напечатано $\exp(\omega, s)$ вместо $\exp(\omega_1 s)$; на стр. 210 (строка 11 снизу) напечатано $\lambda_n \in P-\Sigma(A)$ вместо $\lambda_n \in \Sigma(A)$; на стр. 211 (строка 19 снизу) напечатано $(2\pi i)^{-1}\int_{C_0}(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,d\lambda$ вместо $(2\pi i)^{-1}\int_{C_0}(\lambda-\lambda_0)^{-1}x_0 d\lambda$.

М. А. Наймарк

818. Полугруппы линейных операторов в общей слабой топологии. Феллер (Semi-groups of transformations in general weak topologies. Feller Wiliam), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 287—308 (англ.)

Обычное предположение сильной измеримости, при котором изучаются однопараметрические полугруппы линейных операторов (см., например, Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, Изд-во иностр. лит-ры, 1951, гл. 9), как указывает автор, слишком стеснительно для многих приложений (в частности, для приложений к уравнениям в частных производных). Полугруппу $\{T_t\}$ $(t \geqslant 0)$ линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве X, автор называет слабо-(Y)-измеримой, если для каждого $x \in X$ и каждого $y \in Y \subset X^*$ (X^*—сопряженное пространство, $Y \subset X^*$—замкнутое подпространство) числовая функция $yT_t x$ измерима по Лебегу. (Так, полугруппа сдвигов в пространстве мер на прямой будет слабо-(Y)-измеримой, если за Y взять совокупность ограниченных непрерывных функций.) Рассматриваются разнообразные свойства слабо-(Y)-измеримых полугрупп. В частности, находится подпространство, на котором полугруппа будет сильно непрерывной при $t>0$ (для пространства мер на прямой таким под-

пространством будет совокупность абсолютно непрерывных мер). В заключение для полугруппы $\{T_t\}$ строится производящий бесконечно малый оператор A и резольвента (но ожидаемая формула $T_t = \exp(tA)$ или какая-либо ее замена отсутствует).

Г. Е. Шилов

819. Линейные функционалы на почти периодических функциях. Хьюитт (Linear functionals on almost periodic functions. Hewitt Edwin), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 303—322 (англ.)

Кольцо $\mathfrak{A}$ всех непрерывных комплексных почти периодических функций на вещественной прямой R изоморфно и изометрично кольцу $\mathfrak{C}(bR)$ всех непрерывных комплексных функций на группе bR характеров дискретной группы R (Гельфанд И. М., Докл. АН СССР, 1939, 25, № 7, 575—577). Этот результат заново доказывается (без указания на то, что он не нов и принадлежит И. М. Гельфанду). Из теоремы А. А. Маркова о представлении линейных функционалов (Марков А. А., Мат. сб., 1938, **4(46)** : 1, 190—191) вытекает, что всякий линейный функционал M на $\mathfrak{A}$ представим в виде $M(f(x)) = \int_{bR} f(\mathbf{x})dm(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x})$ — функция из $\mathfrak{C}(bR)$, соответствующая заданной $f(x)\in\mathfrak{A}$, а m—счетно-аддитивная регулярная комплексная мера на теле борелевских множеств пространства bR (автор ссылается не на теорему Маркова, а на работу Какутани, опубликованную тремя годами позже). Наряду с этим устанавливается, что $M(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu(x)$, где μ — конечно-аддитивная регулярная комплексная мера на наименьшей алгебре множеств $\mathcal{E}^*$, содержащей совокупность $\mathcal{E}$ всех объединений всевозможных пересечений конечного числа множеств I_α, получаемых периодическим повторением открытых интервалов I с произвольными периодами α (так что $I_\alpha = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{I + n\alpha\}$). Основываясь на этом, автор распространяет теорему Бохнера на произвольные (вообще говоря, разрывные) положительно определенные функции $p(t)$ на R, устанавливая для них представление $p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\mu(x)$, где μ—положительная конечно-аддитивная регулярная мера на $\mathcal{E}^*$ (счетно-аддитивная тогда и только тогда, когда $p(t)$ непрерывна). Отсюда $p(t) = M_x(e^{itx})$, где M — положительный линейный функционал на $\mathfrak{A}$; автор не отмечает, что эту связь между произвольными положительно определенными функциями на R и положительными линейными функционалами на $\mathfrak{A}$ впервые установил А. П. Артеменко (Зап. Н-и. ин-та мат. и мех. и Харьковского мат. об-ва, сер. 4, 1940, **41**). Так как каждая конечно-аддитивная мера однозначно расщепляется на счетно-аддитивную и чисто конечно-аддитивную (Yosida Kôsaku, Hewitt Edwin, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 46—66), то каждая положительно определенная функция на R однозначно расщепляется на сумму непрерывной и чисто разрывной положительно определенных функций (этот результат также был получен А. П. Артеменко, но остался неопубликованным из-за гибели автора во время войны). Мультипликативные меры на $\mathcal{E}^*$ (т. е. меры, соответствующие гомоморфизмам кольца $\mathfrak{A}$ в поле комплексных чисел, рассматриваемым как функционалы на $\mathfrak{A}$) характеризуются как принимающие лишь значения 0 и 1. Совокупность этих мер с надлежаще определенными умножением и топологией образует группу, изоморфную bR. Исследуется связь между мерами μ и m, соответствующими одному и тому же функционалу M, и рассматриваются некоторые примеры. Так, устанавливается, что характеристическая функция множества $\{2\pi n\}$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) есть положительно определенная функция, которой соответствует чисто конечно-аддитивная мера ψ, сосредоточенная на множестве $\{n\}$ и определяемая соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} f(k) \text{ для всех } f\in\mathfrak{A}.$$

Д. А. Райков

820. Положительный конус в банаховых алгебрах. Келли, Вот (The positive cone in Banach algebras. Kelley J. L., Vaught R. L.), Trans Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 1, 44—55 (англ.)

Приводится ряд частных результатов, относящихся к нормированным кольцам с инволюцией («банаховы *-алгебры», по терминологии автора). Вот некоторые из них:

Конус в вещественном банаховом пространстве определяется как замкнутое подмножество C, инвариантное относительно сложения и умножения на неотрицательные скаляры (причем не требуется, чтобы из $x\in C$ и $-x\in C$ следовало $x = 0$), а сопряженный конус C' — как совокупность всех линейных функционалов, не отрицательных на C. В предположении, что C содержит шар единичного радиуса с центром e, имеющим единичную норму, устанавливается, что

$$\text{расст. } (-x, C) = \inf_{c\in C} \|x + c\| = \sup_{f\in C'} \frac{f(x)}{\|f\|}.$$

В нормированном кольце с инволюцией замыкание P совокупности конечных сумм элементов вида xx^* является конусом, удовлетворяющим в подпространстве H самосопряженных элементов $z = z^*$ указанному выше условию. Отсюда, в частности, следует, что норма в кольцах с инволюцией $|x| = \sqrt{\sup f(x^*x)}$, где f пробегает все позитивные функционалы с нормой $\|f\| = 1$, равна расстоянию от $-x^*x$ до P.

В кольцах с инволюцией, удовлетворяющей условию $\|xx^*\| = \|x\|^2$, совокупность Q квадратов всех самосопряженных элементов есть конус, ненулевые элементы которого характеризуются условием $\|1 - x/\|x\|\| \leqslant 1$. Для доказательства предположения Гельфанда и Наймарка о том, что указанные кольца изомерны и изометричны * кольцам операторов в гильбертовом пространстве, замкнутым в равномерной топологии, достаточно установить, что $P = Q$.

Даются также новые доказательства известных теорем теории нормированных колец с инволюцией, представляющие методический интерес.

Д. А. Райков

821. **О сохранении спектральных свойств для некоторых банаховых алгебр.** **Рикарт** (On spectral permanence for certain Banach algebras. Rickart C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 2, 191—196 (англ.)

Известная теорема о расширении максимальных идеалов нормированного кольца R_1 на кольцо $R_2 \supset R_1$ (см. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Усп. мат. наук, 1946, 1, № 2(12), 48—148) передоказывается в предположении, что кольцо R_1 (коммутативное, регулярное, без радикала), вообще говоря, лишено единицы. Используя этот результат, автор получает несколько свойств, вытекающих из включения $R_2 \supset R_1$, когда R_1 есть B^*-алгебра, уже, вообще говоря, некоммутативная. Среди этих свойств отметим следующие: 1) квазирегулярность элемента $x \in R_1$ равносильна квазирегулярности x и x^* в R_2 (x называется квазирегулярным в R, если существует $y \in R$ такой, что $x + y + xy = x + y + yx = 0$; для кольца с единицей квазирегулярность элемента x равносильна существованию обратного элемента к элементу $1 + x$); 2) спектральный радиус каждого элемента $x \in R_1$ совпадает со спектральным радиусом x, рассматриваемого как элемент R_2; если $xx^* = x^*x$, то совпадают не только спектральные радиусы, но и сами спектры; в общем случае спектр элемента $x \in R_1$ может быть построен по спектрам в R_2 элементов x и x^*. *Г. Е. Шилов*

822. **Унитарные структуры в конечных кольцах операторов.** **Дай** (The unitary structure in finite rings of operators. Dye H. A.), Duke Math. J., 1953, 20, № 1, 55—69 (англ.)

W^* - алгеброй называется слабо замкнутая самосопряженная алгебра M операторов комплексного гильбертова пространства H, содержащая единичный оператор I.

Алгебра M называется конечной, если соотношения $A^*A = I$ и $AA^* = I$ ($A \in M$) эквивалентны, и неатомичной, если она не содержит минимальных проекционных операторов. В неатомичных W^*-алгебрах слабое замыкание совокупности M_u унитарных операторов совпадает с единичной сферой в M. Если M и N — конечные неатомичные W^*-алгебры, то изоморфизм φ между M_u и N_u, взаимно непрерывный в слабой топологии, может быть единственным образом продолжен до суммы линейного и сопряженного к линейному *-изоморфизмов M и N. Если изоморфизм φ таков, что $\varphi(\lambda I) = \lambda I$ для любого комплексного λ, $|\lambda| = 1$, то φ можно продолжить до *-изоморфизма M и N, а *-изоморфизм M и N индуцирует такой изоморфизм φ.

Н. Я. Виленкин

823. **Некоторые мультипликативные функционалы.** **Буржен** (Some multiplicative functionals. Bourgin D. G.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 174—178 (англ.)

Пусть S — произвольное множество, K — поле комплексных чисел, R — поле действительных чисел, F — одно из полей K, R и пусть через $C^0(S, F)$ обозначено кольцо функций, заданных на S, отличных от нуля только на счетном подмножестве множества S со значениями в F, сходящимися к нулю. При этом умножение в $C^0(S, F)$ определяется как умножение функций, а норма — как верхняя грань модуля значений функций.

Далее, пусть через $L_p(S, F)$ обозначено аналогичное кольцо, в котором норма определяется как $[\Sigma |x(s)|^p]^{1/p}$.

Находится общий вид непрерывного в смысле нормы мультипликативного функционала $M(x)$ в $C^0(S, F)$ и в $L_p(S, F)$.

Аналогичный вопрос был решен ранее автором для кольца непрерывных функций на компактном пространстве (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1950, 36, 564—570).

Для всякого такого функционала существует конечное «определяющее» множество $D \subset S$ такое, что при $F = K$

$$M(x) = \exp\Big(\sum_{d \in D} [\mu(d) + i\nu(d)] \log |x(d)| + in(d) \arg x(d)\Big),$$

где $\mu(d) > 0$ при $d \in D$, $\nu(d)$ — произвольные действительные и $n(d)$ — произвольные целые числа; при $F = R$

$$M(x) = \prod_{d \in D} (|x(d)|^{\mu(d)}) (\operatorname{sign} x(d))^{n(d)},$$

где $\mu(d) > 0$, а $n(d) = 0$ или $n(d) = 1$.

Аналогичный результат выводится для слабо непрерывного мультипликативного функционала в кольце $C(Q, R)$ непрерывных действительных функций на компактном пространстве Q. Кроме того, переходя от компактной группы G к группе ее характеров G' и пользуясь результатами, полученными для $L_2(S, F)$, автор находит общий вид непрерывного в смысле нормы мультипликативного функционала в кольце $L_2(G, F)$ функций с интегрируемым квадратом на G, причем умножение в $L_2(G, F)$ определяется теперь как свертывание.

М. А. Наймарк

824. **Замечание к работе Аллена.** **Рустон** (Note on a paper by H. S. Allen. Ruston A. F.), Bull. Soc. math. France, 1953, 81, № 1, 77 (англ.)

Пусть E и F — левое и правое линейные векторные пространства над (вообще не коммутативным) телом K. Если на $E \times F$ существует билинейный функционал (x, y) со значениями из K такой, что $(x, y) = 0$ для всех $x \in E$ (соответственно $y \in F$) при условии, что $y = 0$ (соответственно $x = 0$), то E и F называют дуальными пространствами [относительно функционала (x, y)]. Аллен (Allen H. S., Bull. Soc. math. France, 1952, 80, № 3, 233) доказал, что если E и F — дуальные пространства, то сопряженные пространства F* и E* также дуальные в предположении, что характеристика тела K не равна 2. Автор показывает, что последнее предположение излишне, т. е. теорема Аллена верна при любом теле K. *Д. А. Райков*

См. также 532, 596 **РЕЦ**, 597, 603, 612, 613, 615, 638, 641, 648, 649, 667, 683, 686, 709, 734, 735, 742 Д, 751, 753, 897, 898, 901

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

825. **Совокупности с независимо распределенными средним значением и стандартным отклонением выборки. Бейкер** (Populations with means and standard deviations of samples independently distributed. Barker G. A.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 3, 182—183 (англ.)

Очень простым способом доказывается теорема, полученная ранее Гири (Geary R. C., J. Roayl Statist. Soc. Suppl., 1936, **3**, № 2, 178—184) и Лукачем (Lukacs E., Ann. Math. Statistics, 1942, **13**, 91—97), о том, что из независимости выборочного среднего и выборочной дисперсии следует нормальность исходного распределения. *В. А. Севастьянов*

826. **Совместное распределение выборочного среднего и выборочного стандарта в случае вероятностной плотности, заданной на всей действительной оси. Спрингер** (Joint sampling distribution of the mean and standard deviation for probability density functions of doubly infinite range. Springer Melvin D.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 118—122 (англ.)

Плотность вероятностей $f(x_1)\dots f(x_n)dx_1\dots dx_n$ для повторной выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ преобразуется к переменным $x_1, \dots, x_{n-2}, \bar{x}, S$, где $\bar{x}$ — выборочное среднее, S — выборочный стандарт. Указываются пределы интегрирования для x_1, $x_2, \dots, x_{n-2}$, после чего совместная плотность распределения $\bar{x}$ и S выражается $(n-2)$-кратным интегралом. Не по существу дела подчеркивается различие между заданием $f(x)$ в $(-\infty, \infty)$ и в $(0, \infty)$. *Ю. В. Линник*

827. **Классы эквивалентных случайных величин. Дынкин Е. Б.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2 (54), 125—130

Набор случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ называется классом эквивалентных случайных величин, если при любом выборе индексов $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ совместное распределение величин $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}$ зависит только от k.

Показано, что всякий класс эквивалентных случайных величин представляет собой последовательность взаимно независимых случайных величин, подчиненных одному и тому же закону распределения, рассматриваемому как случайная функция. Аналогичная теорема для частного случая случайных событий доказана ранее (Хинчин А. Я., Докл. АН СССР, 1952, 85, 713—714). *А. Я. Хинчин*

828. **Некоторые предельные теоремы теории вероятностей с их приложениями к статистике. Дианада** (Some probability limit theorems with statistical applications. Dianada P. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 239—246 (англ.)

Последовательность случайных величин $\{X_i\}$, $1 \leqslant i < \infty$ (или $-\infty < i < \infty$), называется m-связанной ($m \geqslant 0$ — целое число), если составные величины $(X_a, X_{a+1}, \dots, X_r)$ и $(X_s, X_{s+1}, \dots, X_n)$ независимы одна от другой при $s - r > m$ для всех целых a, r, s, n $(a \leqslant r < s \leqslant n)$.

Пусть $\{X_i\}$, $1 \leqslant i < \infty$, — стационарная m-связанная последовательность, $MX_i = 0$, $M(X_iX_j) = C_{i-j}$, а существование моментов более высоких порядков не предполагается. Доказывается (теорема 2), что случайная величина $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 = \sum_{k=-m}^{m} C_k$. Случай $m = 0$ представляет собой известную теорему Линдеберга—Леви. В общем случае $m > 0$ теорема доказывается сведением ее к теореме Линдеберга—Леви путем применения метода секционирования последовательности $\{X_i\}$, который впервые в аналогичных вопросах был использован С. Н. Бернштейном (Усп. мат. наук, 1944, **10**, 65—114).

Пусть $\{Y_i\}$, $-\infty < i < \infty$, — стационарная m-связанная последовательность со средним 0 и конечными вторыми моментами; A_t $(t = 0, 1, 2, \dots)$ — последовательность постоянных, $\sum_{0}^{\infty} |A_t| < \infty$. Доказывается, что 1) величины $\sum_{t=0}^{n} A_t Y_{i-t}$ сходятся по вероятности при $n \to \infty$ к некоторым случайным величинам X_i и 2) величина $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией $\sum_{-\infty}^{\infty} C_k$, где $C_{i-j} = M(X_iX_j)$. Доказательство состоит по существу в сведении этой теоремы к теореме 2. Формулируются многомерные обобщения приведенных результатов. В конце работы обсуждаются возможности их статистических применений. *Н. А. Сапогов*

829. **Обращение матриц методом «Монте-Карло» и рекуррентные события. Эдмундсон** (Monte Carlo matrix inversion and recurrent events. Edmundson H. P.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 18—21 (англ.)

Сущность метода «Монте-Карло» для обращения матриц такова:

С матрицей $P = (p_{ik})$, $i, k = 1, \dots, m$, $p_{ik} \geqslant 0$,

$$p_{i0} = 1 - \sum_{k=1}^{m} p_{ik} > 0,$$

связывается дискретная цепь Маркова с состояниями $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, с вероятностями перехода p_{ik} (где $p_{00} = 1$). Производится серия испытаний («случайная прогулка»), заканчивающаяся при появлении ε_0. Вводятся две случайные величины: 1) $s_{ik} = p_{k0}^{-1}$, если игра, начинающаяся с ε_i, оканчивается на следующем шагу после появления ε_k, и $s_{ik} = 0$ во всех других случаях; 2) v_{ik} есть число попаданий в ε_k в случайной прогулке, начинающейся с состояния ε_i.

В работе Форсайта и Лейблера (Forsythe G. E., Leibler R. A., Math. Tables and other Aids Comput., 1950, **4**, 127—129) установлено, что

$$E(s_{ik}) = q^{ik}, \tag{1}$$

$$E(s_{ik}^2) = p_{k0}^{-1} q^{ik}, \tag{3}$$

где матрица $\{q^{ik}\} = (E - P)^{-1}$.

В работе Кёртиса (Curtiss J. H., I. B. M. Seminar on Scientific Computations, Nov. 1949) установлено, что

$$E(v_{ik}) = q^{ik}, \tag{2}$$

$$E(v_{ik}^2) = (2q^{kk} - 1)\, q^{ik}. \tag{4}$$

Далее, Вазов (Wasow W. R., Math. Tables and other Aids Comput., 1952, **6**, 78—81) установил, что

$$E(s_{ik}^2) = \frac{\lambda_{ik}}{p_{k0}(1 - \lambda_{kk})} \tag{3'}$$

и

$$E(v_{ik}^2) = \frac{\lambda_{ik}(1 + \lambda_{kk})}{(1 - \lambda_{kk})^2} \tag{4'}$$

для $i \neq k$, где λ_{ik} есть вероятность попадания в ε_k в случайной прогулке, начинающейся с состояния ε_i.

В реферируемой работе непосредственно устанавливается равенство правых частей в соотношениях (3), (3′) и (4), (4′). *Д. К. Фаддеев*

830. О теории прогнозирования нестационарных стохастических процессов. Престон (On the theory of prediction of nonstationary stochastic processes. Preston Glenn W.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 2, 230—231 (англ.)

Рассматривается наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) линейное приближение к значению случайного процесса $S(t)$ («сигнала») в момент $T + \Delta$ ($\Delta \geqslant 0$) посредством значений суммы «сигнала» и «шума» $S(t) + N(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. В работах Гренандера (Grenander V., Arkiv Math., 1950, **1**, № 3, 195—277; в этой работе положено $N(t) \equiv 0$) и Дейвиса (Davis R. C., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1952, **23**, № 9, 1047—1053) оно было явно выражено через собственные значения и собственные функции интегрального оператора на $(0, T)$ с ядром, равным корреляционной функции случайного процесса $S(t)+N(t)$. Показывается, что это наилучшее приближение может быть также представлено в виде интеграла в пределах от 0 до T от произведения $S(t) + N(t)$ на весовую функцию $q(T - t)$, удовлетворяющую некоторому интегральному уравнению того же типа, что и уравнения, фигурирующие в работах Винера, Задеха и Рагаццини (Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, John Wiley and Sons, New York, 1949; Zadeh L. A., Ragazzini J. R., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1950, **21**, № 7, 645—655; см. также Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, М.— Л., 1952). Полученное в заметке интегральное уравнение другим способом было выведено в недавней работе Бутона (Booton R. C., Proc. Inst. Radio Engrs, 1952, **40**, № 8, 977—981).

Замеченная опечатка: в строке перед формулой (1) напечатано $ES(t) \equiv 0$ вместо $EN(t) \equiv 0$. *А. М. Яглом*

831 К. Стохастические процессы. Дуб (Stochastic processes. Doob J. L., University of Illinois, pp. 654, 10 doll.), Science, 1953, **117**, № 3036, 17 (библ.)

832 РЕЦ. Труды второго симпозиума в Беркли по математической статистике и теории вероятностей. Ред. Нейман (Proceeding of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Edited by Jerzy Neyman, pp. XI+666, University of California Press, Berkeley and Los Angeles; Cambridge University Press, London, 1951, 11 doll.) [**Рецензия: Кендалл** (Kendall M. G.), Nature, 1953, **171**, № 4349, 410 (англ.)]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

833. Методы изучения экспериментальных ошибок. Элянд (Eksperymentalny błąd metody. Elandt Regina), Wiadom. chem., 1953, **7**, № 3, 97—122 (польск).

Популярное изложение начал теории ошибок с большим количеством численных примеров.

834. О распределении математических ожиданий упорядоченных статистик. Хёфдинг (On the distribution of the expected values of the order statistics. Hoeffding Wassily), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 93—100 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты независимых наблюдений над случайной величиной X, имеющей функцию распределения $F(x)$, для которой $\int |x|\, dF(x) < +\infty$. $Z_{n1} \leqslant Z_{n2} \leqslant \ldots \leqslant Z_{nn}$ — упорядоченные в порядке возрастания наблюденные значения. Если $g(x)$ — непрерывная функция, принимающая вещественные значения, то в предположении, что $|g(x)| \leqslant h(x)$, где $h(x)$ — выпуклая функция, для которой

$$\int h(x)\, dF(x) < +\infty,$$

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(MZ_{nj}) = \int g(x)\, dF(x) = Mg(X).$$

Б. В. Гнеденко

835. Испытание «неслучайности» в размещении растений. Мур (A test for non-randomness in plant populations. Moore P. G.), Ann. Bot., 1953, **17**, № 65, 57—62 (англ.)

Предлагается простой критерий для проверки существенности наблюденных уклонений от закона Пуассона в распределении растительных видов по обследуемой площади. *Н. В. Смирнов*

836. Заметка о плане эксперимента неполной системы блоков с балансированными рядами.

Хартли, Шриханде, Тейлор (A note on incomplete block designs with row balance. Hartley H. O., Shrikhande S. S., Taylor W. B.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 125—126 (англ.)

Рассматривается схема дисперсионного анализа, в которой предусматриваемое планом число опытов в каждом блоке меньше числа вариантов. *Н. В. Смирнов*

837. **Класс экспериментальных планировок, использующих блоки с двумя опытами. Кемптори** (A class of experimental designs using blocks of two plots. Kempthorne O.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 76—84 (англ.)

Детально рассмотрена схема дисперсного анализа, учитывающая естественную группировку опытного материала в пары (случай близнецов, раздвоенных листьев и т. п.). *Н. В. Смирнов*

838. **Эффективность последовательной выборки для признаков. Ч. 1. Теория. Хамакер** (The efficiency of sequential sampling for attributies. Part 1. Theory. Hamaker H. C.), Philips Res. Repts, 1953, 8, № 1, 35—46 (англ.)

В работе несколько упрощается предложенная Вальдом (Wald A., Sequential analysis, 1947) последовательная процедура выбора между двумя гипотезами. Число параметров, от которых зависят границы областей приема одной из гипотез и отбрасывания ее, автор уменьшил на единицу. *Б. В. Гнеденко*

839. **Замечание к методу обращения статистических планировок. Мохон Рой** (A note on the method of inversion of statistical designs. Mohon Roy Purnendu), Sci. and Culture, 1953, **18**, № 9, 440—441 (англ.)

840. **Поправка к статье «Некоторые непараметрические критерии для слишком больших или слишком малых значений наибольшей из наблюденных величин». Уолш** (Correction to «Some nonparametric tests of whether the largest observations of a set are too large or too small». Walsh John E.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 134—135 (англ.)

Поправка к работе автора (Ann. Math. Statistics, 1950, **21**, 583—592).

841 К. **Введение в статистику. Кларк** (An introduction to statistics. Clark Charles E.), Science, 1953, **117**, № 3036, 17 (библ.)

842 РЕЦ. **Планирование и анализ экспериментов. Кемптори** (The design and analysis of experiments. Kempthorne O., XIX+631 S., Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall Ltd., London, 1952) [**Рецензия: Шметтерер** (Schmetterer L.), Monatsh. Math. 1953, **57**, 94—95 (нем.)]

843 РЕЦ. **Методы статистического анализа. Гулден** (Methods of statistical analysis. Goulden C. H., pp. VI+467, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952, 7.50 doll.) [**Рецензия: Колупайла** (Kolupaila Steponas), Appl. Mech. Revs, 1953, 6, № 3, 108 (англ.)]

844 РЕЦ. **Статистические методы для естествоиспытателей, медиков и инженеров. Линдер** (Statistische Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. Linder A., 238 S., 43 Figuren, Verlag Birkhäuser, Basel, 1951) [**Рецензия: Еклин** (Jecklin H.), Elem. Math., 1953, 8, № 2, 46 (нем.)]

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ

845. **О накопленных суммах случайных чисел. Вурком** (On cumulative sums of random numbers. Woerkom A. J. J. van), Astron. J., 1953, **58**, № 1, 10—20 (англ.)

Статистической обработкой наблюдений подтверждается гипотеза Брауэра (Brouwer D., Astron. J., 1952, **57**, 125) о том, что флуктуации средних долгот Луны могут быть объяснены совокупным эффектом случайных изменений скорости вращения Земли.

Изучены свойства первых и вторых сумм

$$\Delta(n)=\sum_{i=1}^{u}\delta_i,\quad f(n)=\sum_{i=1}^{n}\Delta(i)$$ случайных чисел δ_i.

Б. В. Гнеденко

846. **Кривые времени ожидания вызовов, обслуживаемых в случайном порядке. Риордан** (Delay curves for calls served at random. Riordan John), Bell System. Techn. J., 1953, **32**, № 1, 100—119 (англ.)

Законы распределения времени ожидания, когда вызовы обслуживаются в порядке очереди, найдены и изучены Эрлангом. Если вызовы обслуживаются в случайном порядке, что ближе к действительной практике, то задача значительно усложняется.

Пусть имеется полнодоступный пучок из c линий, пусть a — среднее число поступающих в единицу времени вызовов и $\alpha = a/c$ — средняя загруженность линии; допустим, что время занятия линии распределено по показательному закону со средним значением 1; наконец, пусть через $F_n(t)$ обозначена вероятность того, что время ожидания для вызова, в момент появления которого имеется n ожидающих, будет больше чем t. Предположив, что вызовы обслуживаются в случайном порядке, мы получим систему найденных Воло (Vaulot E., C. r. Acad. sci., 1946, **222**, 53—56) разностно-дифференциальных уравнений

$$\frac{dF_n(u)}{du}=\frac{n}{n+1}F_{n-1}(u)-(1+\alpha)F_n(u)+\alpha F_{n+1}(u),$$

где $u = ct$, с легко устанавливаемыми начальными условиями. Повидимому, точные решения этой системы не могут быть записаны в форме, достаточно удобной для конкретных расчетов; для составления таблиц и вычерчивания графиков функций $F_n(u)$ приходится поэтому пользоваться приближенными выражениями для этих решений. Общий вид соответствующих кривых заставляет предполагать, что наиболее удобными для этой цели окажутся приближения в виде линейных комбинаций функций вида $e^{\lambda u}$; число необходимых функций этого вида за-

висит, очевидно, от требуемой точности результатов. Так как сравнительно легко могут быть вычислены моменты законов распределения $F_n(u)$, то для определения входящих в приближенные формулы постоянных рекомендуется применять метод моментов, т. е. приравнивать несколько первых моментов функций $F_n(u)$ соответствующим моментам приближенных формул и из этих равенств определять искомые постоянные. Этот метод иллюстрируется рядом примеров. Приводятся графики и таблицы функций $F_n(u)$. *А. Я. Хинчин*

847. Об определении среднего значения и дисперсии величины, недоступной прямому измерению. Опиц (Zur Bestimmung von Mittelwert Streuung einer der Messung unzugänglichen Größe. Opitz Günther), Faserforsch. und Textiltechnik, 1953, **4**, № 2, 55—58 (нем.)

Рассматривается вопрос об условиях и границах применимости хорошо известных приближенных формул:

$$\overline{z} \approx f(\overline{x}, \overline{y});$$

$$\mu_z^2 = \sigma_x^2 f_x^2(x, y) + 2r\sigma_x\sigma_y f_x(x, y) f_y(x, y) + \sigma_y^2 f_y^2(x, y),$$

служащих для оценки среднего значения и дисперсии функции $z = f(x, y)$, аргументы которой могут быть непосредственно измерены. Выводы статьи применяются к задаче оценки среднего значения разрывной длины пряжи по замеренным значениям разрывного усилия и метрическому номеру. *Н. В. Смирнов*

848. О вычислении среднего значения и закона суммирования в текстильных исследованиях. Винклер (Über die Berechnung des Mittelwertes und das Gesetz der Fehlerfortflanzung bei textilen Untersuchungen. Winkler Friedrich), Faserforsch. und Textiltechnik, 1953, **4**, № 2, 58—63 (нем.)

В статье обсуждаются те же вопросы что и в статье Опица (см. реф. 847). Приводятся примеры использования приближенных формул для средних значений и дисперсий показателей, применяющихся в текстильном деле. *Н. В. Смирнов*

849 РЕЦ. Статистическая теория в исследовательской работе. Андерсон, Банкрофт (Statistical theory in research. Anderson R. L., Bancroft T. A., pp. 399, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1952, 7.00 doll.) **[Рецензия: Крендел** (Krendel Ezra), J. Franklin Inst., 1953, **255**, № 4, 358 (англ.)]

850 РЕЦ. Статистическая теория с техническими приложениями. Хальд (Statistical theory with engineering applications. Hald A., pp. 783, Wiley, New York, London, Chapman and Hall, 1952, 9.00 doll.) **[Рецензии: Берр** (Burr Irwing W.), Science, 1953, **117**, № 3027, 21 (англ.); **Кинг** (King Edgar P.), J. Chem. Education, 1953, **30**, № 4, 212 (англ.)]

См. также: 532, 533, 542 **РЕЦ**, 553, 593, 638, 764 **РЕЦ**, 774 **Д**, 781, 859 **РЕЦ**, 894, 926 **К**, 927 **РЕЦ**

ГЕОМЕТРИЯ

851. Свойство линейных циклических преобразований. Кадуэлл (A property of linear cyclic transformations. Cadwell J. H.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 85—89 (англ.)

Квадратная матрица (α_{pq}) порядка n называется циклической, если $\alpha_{pq} = \alpha_{q-p}$, где α_s — набор чисел такой, что $\alpha_{n+s} = \alpha_s$. Пусть имеется последовательность полигонов $P_0, P_1, \ldots, P_l, P_{l+1} \ldots$ с n вершинами в h-мерном пространстве таких, что

$$z_r^{l+1} = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s z_{r+s}^l$$

(z_r^l обозначает радиус-вектор r-й вершины полигона P_l). Обозначая

$$z^{(l)} = \begin{pmatrix} z_1^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n^l \end{pmatrix},$$

получим: $z^{(l+1)} = \Lambda z^{(l)}$, где Λ — циклическая матрица.

В работе изучается асимптотическое поведение P_l при больших l. Характеристические числа $\lambda_k \exp(i\varphi_k)$ матрицы Λ могут быть выражены по формулам:

$$\lambda_k \exp(i\varphi_k) = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s \exp(2\pi i k s / n).$$

Посредством этих чисел векторы z_r^l выражаются через z_r^0. Допустим, что среди λ_k $(k > 0)$ имеется единственный максимум λ_m. Тогда P_l асимптотически представляется аффинным образом правильного плоского многоугольника (звездообразного при $m \neq 1$) с n/d вершинами, где $d = (m, n)$.

Если число $\varepsilon = n\varphi_m/2\pi_m$ является рациональным, то аппроксимирующие полигоны с возрастанием l периодически повторяют свою форму и положение (с точностью до поворота на π). В случае иррационального ε это повторение происходит лишь приближенно.

Автор иллюстрирует эти результаты на ряде примеров. В частности, когда коэффициенты α_s симметричны относительно одного из этих коэффициентов (т. е. $\alpha_{t-s} = \alpha_{t+s}$ при некотором t) этот период равен 1 и аппроксимирующие полигоны принадлежат все одному семейству (в пределах которого форма и положение, с точностью до

поворота на π, повторяются). При симметрии относительно пары коэффициентов $(\alpha_{l-s} = \alpha_{l+1+s})$ таких семейств имеется два или одно, в зависимости от четности или нечетности n.

Указывается, что если имеется более чем одно максимальное значение λ_m $(m > 0)$, то предельные полигоны, вообще говоря, уже не будут плоскими. Поведение последовательности имеет, однако, аналогичный характер. *И. З. Розенкноп*

852. Неприводимая невыпуклая область. Оллерншоу (An irreducible non-convex region. Ollerenshaw Kathleen), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 194—200 (англ.)

Область F называется неприводимой, если каждая ее собственная подобласть имеет меньший минимальный детерминант, чем F (минимальным детерминантом $\Delta(F)$ области F называется нижняя грань детерминантов решеток, не имеющих внутри F точек, отличных от начала 0). Показывается, что звездчатая область K, определенная неравенствами $|x^2 - y^2| \leqslant 2$, $|xy| \leqslant 1$ (для такой области $\Delta(K) = 2$; см. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1945, **41**, 77—96), содержит единственную неприводимую звездчатую область H, для которой $\Delta(H)$ тоже равен 2. Для области H отношение $Q(H) = A(H)/\Delta(H)$, где $A(H)$ — площадь H, оказывается равным 3,5128..., что меньше всех известных ранее значений отношения Q для звездчатых областей и меньше того значения отношения Q, которое по предположению Малера (Mahler K., Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetensch., 1947, **50**, 326—337) является наименьшим возможным для выпуклых звездчатых областей.

Область H строится следующим образом. Пусть V_1, V_2,..., V_8 — вершины звездчатой области K; A_1, A_2,..., A_8 — середины дуг гипербол, которыми она ограничена (A_1 — середина дуги V_8V_1; A_2 — середина V_1V_2 и т. д.); строится параллелограмм OP_1RQ_4 площади 2, где P_1 и Q_4 — точки дуг A_1V_1 и V_3A_4; P_1R и Q_4R — касательные в точках Q_2 и P_3 к дугам A_2V_2 и V_2A_3 (P_3 симметрично P_1 относительно OA_2; Q_2 симметрично Q_4 относительно OA_3). Геометрическое место вершин R таких параллелограммов представляет некоторую выпуклую дугу, которая отсекает часть области K, прилегающую к вершине V_2. Область H получается из K отбрасыванием восьми подобных частей.

В конце работы строится незвездчатая область G такая, что $Q(G) = 1{,}3173...$ *И. М. Яглом*

853. Геометрическое представление размерностей физических величин и его применение. Рот-Демёль (Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Grössen und ihre Anwendung. Roth-Desmeules E.), Elem. Math., 1953, **8**, № 3, 60—62 (нем.)

Исходя из того, что всякая физическая величина может быть представлена через ее размерность в виде

$$[A] = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_n^{a_n},$$

где A_i — основные размерности, показатели a_i — целые или рациональные числа, автор связывает с этой величиной вектор a, определяемый координатами a_1, a_2,..., a_n в аффинном n-мерном векторном пространстве. Затем, пользуясь понятием качественной связи (qualitative Verknüpfung) величин и их размерностей (Landolt M., Grösse, Masszahl und Einheit; Rascher, Zürich, 1943, 61—65), автор устанавливает, что размерности физических величин образуют n-мерное векторное пространство V_n над полем рациональных чисел.

Во второй части рассматривается переход от одной системы размерностей к другой, причем этот переход представляется как преобразование аффинной системы координат в векторном пространстве. Так, например, переход от системы MLT (масса, длина, время) к системе KLT (сила, длина, время) осуществляется при помощи матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом в столбцах матрицы стоят координаты новых базисных векторов [в статье ошибочно сказано «старых»] в старой координатной системе.

В третьей части статьи рассматриваются изменения масштабов внутри системы единиц. Автор заключает, что сами единицы не образуют векторного пространства, если для них воспользоваться тем же геометрическим представлением, что и для размерностей. *Н. И. Кованцов*

854 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Рудаев А. К., Изд. 8-е (стереотипное), 344 стр., Гостехиздат, М., 1953

Книга является учебным пособием по начертательной геометрии для втузов. В первых 28 главах приводятся задачи начертательной геометрии на (комплексных) эпюрах в ортогональных проекциях. Три последних главы содержат задачи на применение «родственного» (перспективно-аффинного) соответствия, аксонометрические проекции, а также задачи на построение третьей проекции по двум заданным и на построение отверстий и разрезов в геометрических фигурах. Следует отметить многочисленные наглядные (аксонометрические) изображения. В «Сборнике» уделено необходимое внимание задачам технического содержания (например, на построение сечений винтов, труб и прокатной стали). *Н. Ф. Четверухин*

855 РЖ. Тензоры в теории электрических машин. Гибс (Tensors in electrical machine theory. Gibbs W. J., pp. XII+238, Chapman and Hall, London, 1952, 30 shill.) [**Рецензия: Лебль** (Lailbe Th.), Bull. Schweiz. elektrotechn. Vereins 1953, **44**, № 6, 278 (нем.)]

856 РЖ. Геометрия и воображение. Кон-Фоссен, Гильберт (Geometry and the imagination. Cohn-Vossen S., Hilbert D., pp. 357, Chelsea Publishing Co., 1952, 5.00 doll.) [**Рецензия:** Phys. Today, 1953, **6**, № 5, 119 (англ.)]

857 РЕЦ. Аналитическая геометрия. Морий (Analytic geometry. Morrill W. K., pp. 380, International Textbook Co., Scranton, 1951, 3 doll. 0,6) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 3—4, 117 (франц.)]

858 РЕЦ. Тензорный анализ. Теория и приложения. Сокольников (Tensor analysis. Theory and applications. Sokolnikoff I. S., pp. IX+335, Wiley, N. Y., 1951, 6.00 doll.) [**Рецензии: Де Чикко** (DeCicco John), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 86—88 (англ.); **Миллер** (Miller Carman E.), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 231—232 (англ.)]

859 РЕЦ. Математический репертуриум. Вилла (Repertorio di matematiche. Villa M., Cedam. Padova, 1951) [**Рецензия: Граффи** (Graffi Dario), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 4, 504—505 (итал.)]

860 Д. Некоторые вопросы построения наглядных изображений при параллельном проектировании. Хорунов Рахим. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1953

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

861. Одна теорема элементарной геометрии. Лауффер (Ein Satz der elementaren Geometrie. Lauffer R.), Elem. Math., 1953, **8**, № 3, 65 (нем.)

Дается новое доказательство теоремы Помпейю: если ABC — равносторонний треугольник, а D — произвольная точка в его плоскости, то из отрезков AD, BD и CD можно составить треугольник. Если точка D взята на окружности, описанной около ABC, то упомянутый треугольник вырождается. *Н. М. Бескин*

862. О чевианах треугольника. Тебо (On cevians of triangle. Thébault Victor), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 3, 167—173 (англ.)

Рассматриваются прямые AA_1, BB_1, CC_1 («чевианы»), выходящие из вершин треугольника ABC и делящие противоположные стороны в точках A_1, B_1, C_1 пропорционально n-ым степеням прилежащих сторон. При $n=0$, 1, 2 прямые являются соответственно медианами, биссектрисами, симедианами треугольника. Из теоремы Чевы следует, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке P_n.

Точки A_1', B_1', C_1', гармонически сопряженные точкам A_1, B_1, C_1 относительно точек B и C, C и A, A и B, коллинеарны.

При помощи теоремы Стюарта находится ряд метрических соотношений, в частности

$$\overline{AA_1}^2 = \frac{(bc)^2[(b^{n-2}+c^{n-2})(b^n+c^n) - a^2(bc)^{n-2}]}{(b^n+c^n)^2},$$

$$\overline{AA'}_1^2 = \frac{(bc)^2[(b^{n-2}-c^{n-2})(b^n-c^n) + a^2(bc)^{n-2}]}{(b^n-c^n)^2},$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Показывается, что расстояние произвольной точки Q, лежащей в плоскости треугольника, от точки P_n равно

$$\overline{QP}_n^2 = \frac{\Sigma a^n \overline{QA}^2}{\Sigma a^n} - D_n,$$

где D_n не зависит от положения точки Q. В частности,

$$D_0 = \frac{a^2+b^2+c^2}{9}; \quad D_1 = 2Rr;$$

$$D_2 = \frac{3(abc)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

где R и r — радиусы описанного и вписанного кругов.

Окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, отсекает на сторонах треугольника направленные отрезки x, y, z такие, что

$$\frac{x}{a^{n-1}} + \frac{y}{b^{n-1}} + \frac{z}{c^{n-1}} = 0.$$

Затем исследуются в произвольном тетраэдре прямые, соединяющие вершину тетраэдра с точками пересечения чевиан, проведенных в противоположной грани. Эти прямые принадлежат одной системе прямолинейных образующих гиперболоида. Для них выводится ряд метрических соотношений в тетраэдре. *С. И. Зетель*

863. По поводу правильного пятиугольника. Бильгер (A propos du pentagone. Bilger G.), Elem. Math., 1953, **8**, № 3, 66 (франц.)

Рассматривается $C_5^3 = 10$ различных вписанных в круг четырехугольников с общей вершиной M и с тремя другими вершинами, совпадающими с вершинами правильного пятиугольника $ABCDE$. Вершина M является серединой дуги AE. Применяя к каждому из этих четырехугольников теорему Птолемея, автор находит несколько метрических соотношений и среди них следующее:

$$\left(\frac{c_{10}^{\text{вып}}}{c_{10}^{\text{зв}}}\right)^2 = \frac{2r - c_{10}^{\text{зв}}}{2r + c_{10}^{\text{вып}}},$$

где $c_{10}^{\text{вып}}$ — сторона вписанного в круг правильного десятиугольника, а $c_{10}^{\text{зв}}$ — сторона правильного вписанного в круг звездчатого десятиугольника. *С. И. Зетель*

864. Решение задачи Снеллиуса — Потенота при помощи инверсии. Нюшелер (Der Rückwärtseinschnitt mit reziproken Distanzen.

Nüscheler R.), Elem. Math., 1953, 8, № 2, 35—37 (нем.)

Задачей Снеллиуса — Потенота (Rückwärtseinschnitt) в геодезии называется задача об определении неизвестной точки N по трем известным ориентирам P_1, P_2 и P_3, углам $P_1NP_2 = \alpha$, $P_1NP_3 = \beta$; для геодезической практики представляют интерес решения этой задачи, не требующие проведения окружностей. В заметке дано одно такое решение, основанное на применении инверсии (преобразования обратных радиусов).

И. М. Яглом

865. Построение осей эллипса по их положению и длине при заданной паре сопряженных полудиаметров. Милс (Construction of the position and extent of the axes of an ellipse, given a pair of semi-conjugate diameters. Mills C. N.), Math. Mag., 1953, 26, № 4, 227—228 (англ.)

866. Евклидова геометрия и группа движений твердого тела. Гудстейн (Euclidean geometry and the rigid motion group. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, 37, № 320, 117—118 (англ.)

Автор отмечает по поводу статьи Литлвуда (Littlewood D. E., Math. Gaz., 1950, 34, 272), что евклидово движение на плоскости получается проективным путем, если дан абсолют (прямая l_0 и эллиптическая инволюция на ней). Если же на модели линия l_0 — собственная, то конгруентные в этой геометрии треугольники не могут быть приведены к совпадению физическим движением.

Ю. Д. Поздняк

867. О геометрии тетраэдра. Тебо (Sur la géométrie du tétraèdre. Thébault Victor), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, № 1, 5—12 (франц.)

Пусть $A_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ — косферические вершины пространственного многоугольника (P); G — барицентр его вершин; (P_i) — многоугольник, определенный $n-1$ точками $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$; G_i — барицентры этих многоугольников.

Многоугольник (p), образованный точками $G_1, G_2, \ldots, G_n$, автор называет дополнительным к (P). Пусть K^2 — сумма квадратов расстояний между всеми парами вершин (P); K_i^2 — такая же сумма для многоугольника (P_i); k_i^2 — сумма квадратов расстояний от точки A_i до всех других точек.

Тогда

$$K^2 = k_i^2 + K_i^2, \quad \sum k_i^2 = 2K^2; \quad \sum K_i^2 = (n-2)\,K^2.$$

Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A_i равна K^2, есть сфера $\left(G, K\sqrt{n-1}/n\right)$ с центром G и радиусом $\sigma_p^2 = \frac{n-1}{n^2}K^2$.

Сферы (a_i, σ_i), преобразованные посредством гомотетии $\left(A_i, \frac{n}{n-2}\right)$ из сферы (G, σ_p), ортогональны к сфере дополнительного многоугольника (p). $(n-1)$-кратная сумма квадратов расстояний от вершины A_i до всех других вершин A_j многоугольника (P), уменьшенная на сумму квадратов расстояний между всеми парами вершин (P), равна $(n-1)\,(n-2)^2$-кратной степени A_i относительно соответствующей сферы (a_i, σ_i). Отсюда следствие: сфера с центром A_i, ортогональная к сфере (a_i, σ_i), является также ортогональной к сфере радиуса $\sigma_i' = \frac{R}{n-2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, концентрической к сфере $3n$ точек многоугольника (P).

Рассматривается случай тетраэдра, в частности, ортоцентрического.

Р. М. Гейдельман

868. Линия Симсона и ее огибающая. (Simson's line and its envelope. E. H. L.), Math. Gaz., 1953, 37, № 320, 124—125 (англ.)

Введем координацию точек A, B, C окружности O при помощи центральных углов α, β, γ, образуемых радиусами OA, OB, OC с некоторым начальным радиусом OP. При этом, очевидно, координаты точек A, B, C определяются с точностью до кратного 360°, так что значениями их следует считать величины $\alpha + n.360°$; $\beta + n'.360°$; $\gamma + n''.360°$.

Средней арифметической точек A, B, C будут точки G с координатами $\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) + n\cdot 120°$. Таких точек G будет три, и положение их не зависит от выбора начальной точки P. Введем еще две точки Q с координатами $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + n\cdot 180°$; положение их зависит от выбора начальной точки P.

При построении в треугольнике ABC линии Симсона для точки P легко обнаружить, что линия Симсона проходит через середину R отрезка HP, где H — ортоцентр $\Delta\,ABC$. Кроме того, R лежит на круге девяти точек $\Delta\,ABC$. Центр этого круга находится в середине N отрезка OH.

Направление линии Симсона совпадает с направлением построенной ранее линии OQ, а огибающая линии Симсона, при изменении положения точки P, является гипоциклоидой с периодом $\frac{2\pi}{3}$, описываемой кругом радиуса, равного NR, когда он катится без скольжения по кругу радиуса $3NR$ с центром в точке N. Точки возврата гипоциклоиды лежат на определенных выше радиусах OG.

Н. М. Несторович

ПРОЕКТИВНАЯ, НЕЕВКЛИДОВА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИИ

869. Конгруентное перемещение коллинеарных пространств в аксиальное положение. Брауне р (Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage. Brauner Heinrich), Monatsh. Math., 1953, 57, 75—87 (нем.)

Вопреки естественному предположению, что ∞^9 аксиальных коллинеаций в соединении с ∞^6 конгруентных преобразований дают все ∞^{15} коллинеаций, Вундерлихс показал, что такой счет параметров ведет к ложному заключению. Только особые коллинеации могут быть переведены движением в аксиальное положение; автор, используя и синте-

тические, и аналитические методы, ищет характеристику этих коллинеаций и то непрерывное движение, которое не выводит эти системы из аксиального расположения.

В произвольной коллинеации двух пространств Σ и Σ' бесконечно-удаленной плоскости $\omega = v'$, как плоскости ω первой системы, во второй системе соответствует собственная плоскость ω', а как плоскости v' системы Σ' в первой системе соответствует собственная плоскость v; бесконечно-удаленные прямые $w = (\omega, v)$ и $w' = (\omega', v')$ являются соответствующими. Пусть $h \perp v$ и $h' \perp \omega'$ будут главными лучами (Штурм) двух коллинеарных пространств. В пучке плоскостей с осью h имеется по крайней мере одна пара ортогональных плоскостей μ и ν. В пучке с осью h' этой паре соответствует также ортогональная пара плоскостей μ' и ν'. Эти две пары плоскостей называются главными плоскостями коллинеации систем Σ и Σ' (Штурм, Рейе). Совмещение $\mu = \nu'$, $\mu' = \nu$, $\omega' = v$ (при помощи движения Σ') автор называет нормальным расположением систем Σ и Σ'.

Аксиальная коллинеация определяется двумя косыми прямыми $e = e'$, $f = f'$ (оси коллинеации — места инвариантных точек); их общий перпендикуляр $h = h'$ (всегда действительный) нормален к плоскостям ω' и v и будет главным лучом обеих систем Σ и Σ'. Через середину h и к нему перпендикулярно проведем биссектрисы (они всегда действительны) a_1 и a_2 осей e и f; поворот системы около одной из осей a_1 или a_2 на 180° приводит к нормальному расположению. Итак, всякая аксиальная коллинеация «обращением» переводится по крайней мере двумя способами в нормальное расположение.

Если между двумя коллинеарными пространствами Σ и Σ' в нормальном положении может быть установлена аксиальная коллинеация, то в Σ и Σ' должны существовать соответственные конгруентные прямолинейные ряды точек, которые и будут служить осями коллинеации. Каждая нормаль r главного луча переходит в нормаль r' главного луча и ряды на них подобны; среди них надо выделить конгруентные ряды. Круглому цилиндру Φ единичного радиуса с осью h в системе Σ соответствует соосный конус Φ' в системе Σ'; обратно, цилиндру $\Psi' \equiv \Phi$ (при нормальном положении) системы Σ' соответствует в Σ конус Ψ. Коаксиальные поверхности Φ и Ψ пересекаются по кривой 4-го порядка q: каждому прямолинейному ряду r, ортогональному h и содержащему точку Q кривой q в системе Σ, соответствует (в силу $Qh = Q'h' = 1$) конгруентный ряд r' в системе Σ'.

Подробное исследование конусов Ψ и Φ' приводит к заключению, что они конгруентны для коллинеарных систем, переводящихся движением в аксиальное соответствие; после отображения, дающего нормальное расположение, эти конусы совпадают. Указанное условие является и достаточным: если в двух коллинеарных системах конусы Ψ и Φ' конгруентны, то системы переводятся конгруентными преобразованиями (∞^1-способами) в аксиальное расположение.

Находится уравнение коноида, образованного осями упомянутых ∞^1 отображений; это коноид Плюкера, осью которого служит главный луч коллинеации.

Если две коллинеарные системы находятся в аксиальном расположении, то одной из них, не нарушая аксиального соответствия, можно дать некоторое движение, которое ранее было изучено еще Дарбу, а затем Крамесом. *С. С. Бюшгенс*

870. Числовые инварианты и геометрические характеристики линейных комплексов и паратактических конгруенций. **Домшлак Ю. И., Левинов А. М., Семянистый В. И.** Докл. АН Азерб. ССР, 1953, 9, № 2, 71—74

В подлиннике в заглавии опечатка: «комплектов» вместо «комплексов».

Рассматриваются три вида образов симметрии, общая теория которых была построена Б. А. Розенфельдом (Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 6, 543—566): линейные комплексы $(n-1)/2$-мерных плоскостей вещественного проективного пространства Pn, комплексного проективного пространства $Pn(i)$ и двойного проективного пространства $Pn(e)$; паратактические конгруенции прямых вещественных неевклидовых пространств Sn и ${}^eSn$; паратактические конгруенции комплексного и двойного унитарных неевклидовых пространств $K_n(i)$ и $K_n(e)$.

Находятся числовые инварианты и геометрические характеристики пар этих образов, первыми из которых являются собственные числа матриц произведений симметрий относительно этих образов, а вторыми — геометрические образы, переходящие в себя при этом произведении симметрий. Числовые инварианты двух линейных комплексов и паратактических конгруенций попарно равны, причем в случае паратактических конгруенций S_n и ${}^eSn$ числовые инварианты, отличные от 1, входят четверками α, α, α^{-1}, α^{-1}.

Геометрическими характеристиками двух линейных комплексов являются $(n-1)/2$ попарно непересекающихся прямых, состоящих из фокальных точек конгруенции плоскостей, по которой пересекаются данные комплексы.

Геометрическими характеристиками двух паратактических конгруенций Sn и ${}^eSn$ являются $(n+1)/4$ (при четном $(n+1)/2$) и $(n-1)/4$ (при нечетном $(n+1)/2$) попарно непересекающихся трехмерных плоскостей и паратактические конгруенции в этих плоскостях.

Геометрическими характеристиками двух паратактических конгруенций $Kn(i)$ и $Kn(e)$ являются общие прямые этих конгруенций. *М. А. Джавадов*

871. О существовании римановых многообразий, которые не допускают в малом аналитических или гармонических функций, отличных от постоянной. **Хартман, Винтнер** (On the existence of riemannian manifolds which cannot carry non-constant analytic or harmonic functions in the small. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 260—276 (англ.)

Рассматриваются вопросы существования аналитических или гармонических функций в двумерной положительно определенной римановой метрике при той или иной степени гладкости фундаментального тензора и решения.

Доказывается следующая теорема 1:

Если метрика

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx\,dy + g_{22}dy^2 \qquad (1)$$

является непрерывной (т. е. g_{ij} принадлежат классу C^0) в круге D_a

$$x^2 + y^2 < a^2, \qquad (2)$$

то даже при произвольном уменьшении области не всегда существуют преобразования класса C^1

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \qquad (3)$$

с ненулевым якобианом, переводящие линейный элемент (1) в конформно евклидову форму

$$ds^2 = h^2 (du^2 + dv^2). \qquad (4)$$

Ранее было известно (Lichtenstein L., Bull. Acad. sci. Cracovie, 1916, сер. A, 192—217), что если метрика (1) принадлежит классу $C^0(\lambda)$, то всегда существуют обратимые преобразования (3) класса $C^1(\mu)$ $(0 < \mu < \lambda \leqslant 1)$, переводящие (1) в (4). Теорема 1 показывает, что в теореме Лихтенштейна λ нельзя заменить нулем.

Указывается также другая форма теоремы 1: Существуют метрики (1) класса C^0, для которых система уравнений Эйлера—Даламбера (Коши — Римана)

$$\begin{aligned} gv_x &= g_{12} u_x - g_{11} u_y, \\ gv_y &= g_{22} u_x - g_{12} u_y, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $g = (\det g_{ij})^{1/2}$, не допускает отличных от постоянной решений класса C^1.

Показывается, что для более гладких метрик класса C^n (n — положительное целое число) не всегда существует преобразование (3) класса C^{n+1} с ненулевым якобианом, переводящее (1) в (4), но что преобразование класса C^n с этими свойствами существует всегда.

Следовательно, существуют метрики (1) класса C^1, в которых система (5) допускает решение класса C^1, но в которых не существует гармонической функции, т. е. отличного от постоянной решения класса C^2 уравнения

$$\{(g_{22} u_x - g_{12} u_y)/g\}_x + \{(g_{11} u_y - g_{12} u_x)/g\}_y = 0. \qquad (6)$$

Далее рассматривается проблема Дирихле отыскания функции $u(x, y)$, для которой интеграл

$$\iint_{[\Gamma]} g \nabla(u, u)\, dx\, dy \qquad (7)$$

от оператора Бельтрами, распространенный на область $[\Gamma]$, ограниченную любой жордановой кривой Γ (лежащей в круге D_a), достигает минимума при условии, что $u(x, y)$ на контуре Γ принимает заданные значения

$$u(x, y) = \varphi \not\equiv \text{const}$$

(φ — функция класса C^0). Доказывается эквивалентность теоремы 1 с предложением о существовании метрик (1) класса C^0, в которых проблема Дирихле не имеет в $[\Gamma]$ решений класса C^1, непрерывных на $[\Gamma] - \Gamma$.

Среди метрик класса C^1 существуют метрики такие, что для гладкой жордановой кривой Γ и гладкой функции φ имеется решение проблемы Дирихле класса C^1, тогда как соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа (6) не имеет решений, отличных от постоянной. *Б. Л. Лаптев*

872. **Об алгебраических преобразованиях касания Вилла** (Sulle trasformazioni di contatto algebriche. Villa Mario), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 6—9 (итал.)

Преобразования касания между элементами E_1 плоскостей (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ определяются уравнениями $\bar{x} = X(x, y, p)$, $\bar{y} = Y(x, y, p)$, $\bar{p} = P(x, y, p)$, где $dY - PdX = \rho(dy - pdx)$. Отсюда после исключения p, $\bar{p}$ получается «направляющее» уравнение $F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0$. Если F — многочлен, то преобразование касания алгебраическое. Уравнение $F = 0$ определяет две линейные системы плоских алгебраических кривых Σ_1, Σ_2 одной и той же размерности, соответствующих точкам второй или первой плоскости. Доказывается возможность построения преобразования касания по заданным линейным системам Σ_1, Σ_2 и закону взаимности.

С. П. Фиников

873. **Многообразия, точки которых являются образами пар или троек точек, выбранных из групп линейного ряда. Бреннан** (Manifolds whose points image pairs or trios of points chosen from the groups of a linear series. Brennan J. G.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 13, 41—53 (англ.)

Рассматриваются многообразия $V_r(k, n)$ $(r < k \leqslant n)$, точки которых являются образами групп из k точек, содержащихся в линейном ряде g_n^r, заданном на кривой C рода p в k-мерном пространстве (геометрические места точек пересечения соприкасающихся плоскостей к C в указанных точках). Для случая рациональных кривых они исследовались Мортоном (Morton V. C., Proc. London Math. Soc., 1950, **30**, 379). Автор рассматривает кривые $V_1(2, n)$ и поверхности $V_2(3, n)$ и исследует их род (для V_1), порядок, кратные точки и кривые (для V_2). Изучаются частные случаи следующей задачи: на кривой заданы три линейных ряда; определить число троек групп G_1, G_2, G_3 по одной из каждого ряда, обладающих тем свойством, что G_1, G_2, G_3 имеют k_{123} общих точек, а G_i и G_j, кроме указанных k_{123} точек, имеют еще k_{ij} общих точек. Это число (в рассматриваемых случаях $k_{12} = 0$) обозначается через $N[k_{13}, k_{23}, k_{123}]$. Вычисляются $N[3, 3; 0]$, $N[2, 2, ; 1]$, $N[1, 1; 2]$, $N[3, 4; 0]$, $N[0, 1; 3]$, $N[2, 3; 1]$, $N[1, 2; 2]$. *В. В. Морозов*

874. **Замечание о не чисто абелевой поверхности с определителем, представляющим простое число. Конфорто** (Un' osservazione sopra le superficie abeliane impure di determinante primo. Conforto Fabio), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 2—6 (итал.)

Бономи (Bonomi C., Rend. Circ. mat. di Palermo, 1918—19, **43**, 47—70), предлагая метод построения всех абелевых поверхностей ранга один (гиперэллиптических поверхностей), имеющих определитель, равный p, утверждал, что для простого нечетного числа p поверхности делятся на $(p-1)/2$ различных типов. В реферируемой заметке показывается, что существует единственный тип не чисто абелевой поверхности. Приводится конкретный при-

мер такой поверхности. Рассуждения автора, изложенные весьма лаконично, носят чисто алгебраический характер. *М. П. Черняев*

875 **РЖЦ. Арифметические вопросы теории алгебраических многообразий.** Сегре (Arithmetical questions on algebraic varieties. Segre B., pp. X + 55, University of London, the Athlone Press., 1951, 10s. 6d.) [**Рецензия:** Морделл (Mordell L. J.), Math. Gaz. 1953, 37, № 320, 145—146 англ.)]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

876. **Натуральные уравнения поверхности.** Лейхтвейс (Natürliche Gleichungen einer Fläche. Leichtweiss Kurt), Math. Z., 1953, 57, № 2, 244—264 (нем.)

Пусть $\mathbf{x}(u, v)$ — аналитическая в начальной точке ($u = v = 0$) поверхность пространства E_3, удовлетворяющая в этой точке условию

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] \neq 0,$$

с аналитическими в той же точке коэффициентами $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ одной из трех основных квадратичных форм φ и отличным от нуля дискриминантом $Q = AC - B^2 \neq 0$. Кривая C определяется на $\mathbf{x}(u, v)$ аналитическими в $t = 0$ функциями $u = u(t)$, $v = v(t)$, причем в начальной точке $u = v = 0$

$$(u')^2 + (v')^2 \neq 0,$$
$$A(u')^2 + 2Bu'v' + C(v')^2 \neq 0.$$

При этих условиях поверхность $\mathbf{x}(u, v)$ допускает в окрестности точки $\mathbf{x}(0, 0)$ единственную параметризацию $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p, q)$, аналитичную в точке $p = q = 0$, причем форма φ принимает вид

$$\varphi = D(p, q)(dp^2 + \varepsilon\, dq^2) \quad (\varepsilon = \operatorname{sign} Q(0, 0)),$$

и p является для C длиной дуги.

Натуральным уравнением поверхности называется соотношение между некоторой определенной на поверхности дробно-линейной функцией Φ от ее средней H и гауссовой K кривизн и параметрами (p, q) такое, что поверхность однозначно определяется этим соотношением и заданной на ней поверхностной полосой Γ. Каждой из трех форм φ отвечает единственная система параметров (p, q), изотермических (для первой формы), сферо-изотермических (для третьей) и аффинно-изотермических (для второй). Отсюда выводятся три аналогично формулируемые теоремы, из которых приводим первую.

Теорема 1. Если Γ — заданная аналитическая полоса и $f(p, q) \doteq$ некоторая аналитическая при $p = q = 0$ функция, то в окрестности $p = q = 0$ существует, исключая особые случаи, единственная поверхность $\mathbf{x}(p, q)$, аналитичная при $p = q = 0$, с изотермическими параметрами p, q, проходящая через полосу Γ и удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{2l_1H(p, q) + l_2K(p, q) + l_3}{2m_1H(p, q) + m_2K(p, q) + m_3} = f(p, q),$$

$$l_i, m_i = \text{const}, \quad \text{ранг}\begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} = 2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Аналогичные теоремы доказываются для введенной Шеррером (Scherrer W., Comment. math. helv., 1947, 22, 366—381; 1951, 25, 11—25) «относительной основной формы». *С. Д. Россинский*

877. **О внешней кривизне гладких поверхностей.** Погорелов А. В., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 3, 407—409

Приводится данное А. Д. Александровым определение обширного класса двумерных метрических многообразий ограниченной кривизны, содержащего все выпуклые поверхности, все дважды непрерывно дифференцируемые поверхности и др.

Дается определение внешней кривизны гладкой поверхности Φ (т. е. поверхности Φ, допускающей параметризацию $r = r(u, v)$ такую, что r_u, r_v — непрерывные производные, $r_u \times r_v \neq 0$), не подчиненной дальнейшим предположениям регулярности, и в связи с этим вводится в рассмотрение предельно широкий класс гладких поверхностей, являющихся многообразиями ограниченной кривизны.

Сначала определяется абсолютная внешняя кривизна произвольного множества M на Φ как величина

$$\sigma^0(M) = \inf_{M \subset G} \sigma^0(G), \quad \sigma^0(G) = \sup_{(*)} \sum_k \overline{s}(F_k),$$

где G — открытое множество; $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — конечная система замкнутых множеств; $\overline{s}(F_k)$ — площадь сферического изображения F_k, взятого на Φ;

$$F_k \subset G, \quad F_i \cap F_j = 0. \qquad (*)$$

Положительной внешней кривизной, отрицательной внешней кривизной и просто внешней кривизной множества M на Φ называются соответственно функции множеств

$$\sigma^+(M) = \sigma^0(M \cap \Phi^+), \quad \sigma^-(M) = \sigma^0(M \cap \Phi^-),$$
$$\sigma(M) = \sigma^+(M) - \sigma^-(M),$$

где Φ^+ — множество точек X поверхности Φ таких, что около каждой из них есть окрестность, все точки которой располагаются с одной стороны касательной плоскости к Φ в точке X. Если такой окрестности нет, то точка X относится к множеству Φ^-.

Наконец, определяется поверхность Φ ограниченной внешней кривизны, если у каждой ее точки существует G с ограниченной абсолютной кривизной $\sigma^0(G)$. Аналогично определяются Φ с ограниченной положительной (отрицательной) внешней кривизной.

Формулируются теоремы. На гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны σ^0, σ^+, σ^- имеют конечные значения для любого компактного множества, неотрицательны и вполне аддитивны в кольце борелевских множеств на поверхности.

Гладкие поверхности ограниченной положительной внешней кривизны (в частности, поверхности

ограниченной внешней кривизны) допускают в малом равномерное приближение регулярными поверхностями с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами (основная теорема).

Гладкие поверхности ограниченной положительной внешней кривизны являются многообразиями ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова. Таковой же будет поверхность с локально однозначным сферическим изображением.

Введя определение поверхности Ф обобщенной отрицательной кривизны (если не существует поверхности Ф′ с плоским краем, являющейся частью Ф), автор утверждает, что гладкие поверхности обобщенной отрицательной кривизны имеют равную нулю положительную внешнюю кривизну.

В. С. Люкшин

878. **Преломление конгруенции с действительными фокальными поверхностями через оптическую систему. Березина Л. Я.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 1(53), 111—113

Прямолинейная конгруенция после отражения и преломления в однородных средах преобразуется снова в прямолинейную конгруенцию. В работе ищутся связи между элементами исходной и преобразованной конгруенций.

Показывается, что при преломлении конгруенции прямых из одной однородной среды в другую через произвольную поверхность (Σ) имеет место соотношение

$$\frac{2\rho_0 \operatorname{ctg} 2\varphi_0 \operatorname{ctg} i}{m_0^2 - \rho_0^2} = \frac{2\rho_2 \operatorname{ctg} 2\varphi_2 \operatorname{ctg} i'}{m_2^2 - \rho_2^2},$$

где $2\rho_j \operatorname{ctg} 2\varphi_j$ $(j = 0,2)$ есть анормалитет исходной и преломленной конгруенций; i — угол падения луча на поверхность (Σ); i' — угол преломления; m_j — расстояние от центра луча r_j до точки преломления; $2\rho_j$ — расстояние между фокусами луча. Этот результат является обобщением известной теоремы Малуса — Дюпена для нормальной конгруенции. В частности:

1) Если плоскость преломления пересекает поверхность (Σ) по главному нормальному сечению, то

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi_2) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_2 + \varphi_2) = \operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi_0) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0 + \varphi_0),$$

где α_j — угол между биссектрисой фокальных плоскостей луча r_j и перпендикуляром к плоскости преломления.

2) Если (Σ) — плоскость, то

$$(m_2^2 - \rho_2^2) \operatorname{ctg}^2 i' = (m_0^2 - \rho_0^2) \operatorname{ctg}^2 i$$

и

$$\frac{\rho_0 \operatorname{ctg} 2\varphi_0}{\rho_2 \operatorname{ctg} 2\varphi_2} = \frac{\operatorname{tg}^3 i}{\operatorname{tg}^3 i'}.$$

При выводе этих соотношений автор использует результаты двух своих предыдущих работ (Изв. АН Латв. ССР, 1952, 2 (56), 115—126; 1951, 8 (49), 1317—1325). *Н. Г. Туганов*

879. **О преобразованиях касания. Булиган** (Sur les transformations de contact. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 12, 1217—1219 (франц.)

Пусть задано в трехмерном пространстве преобразование касания $M = \tau(x, y, z, p, q)$ (предполагается непрерывность частных производных вектора τ по всем аргументам и компланарность векторов $\mathbf{M}_p$, $\mathbf{M}_q$, $\mathbf{M}_x + p\mathbf{M}_z$, $\mathbf{M}_y + q\mathbf{M}_z$). Рассматривается множество точек Г, являющееся при этом преобразовании образом поверхности $z = \varphi(x, y)$, относительно которой предполагается, что в каждой ее точке паратинжанта (т. е. совокупность прямых, являющихся предельными для прямых, проходящих через пары точек поверхности, стремящиеся к данной) является плоскостью. (Это эквивалентно существованию и непрерывности частных производных $p = \partial\varphi/\partial x$ и $q = \partial\varphi/\partial y$.) Доказывается, что если данное преобразование касания представляется в виде композиции поляритета и «преобразования топологии порядка 1» (т. е. точечного преобразования пространства, задаваемого непрерывно дифференцируемыми функциями с отличным от нуля якобианом), то Г не имеет внутренних точек. Метод доказательства основан на единственности огибающей к данному семейству плоскостей.

Аналогичное предложение имеет место для образа n-мерной поверхности в $(n + 1)$-мерном пространстве. Для преобразований общего типа автор указывает, что образ бесконечно малой окрестности какой-либо точки поверхности $z = \varphi$ является бесконечно сплющенным, т. е. допускает включение в прямой цилиндр, высота которого бесконечно мала по отношению к радиусу максимального прямого кругового цилиндра, ему параллельного и содержащегося в нем. *И. З. Розенкноп.*

880. **К вопросу об образовании поверхностей линиями. Щербаков Р. Н.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2(54), 147—156

На поверхности S рассматривается однопараметрическое семейство линий L. Каждой линии отвечает поверхностная полоса П, состоящая из линии L и касательных плоскостей в ее точках к поверхности S.

Каждой линии L ставится в соответствие проективное преобразование P. Этим определяется совокупность проективных преобразований $\{P\}$, переводящих каждую полосу П в новую полосу П* $= P(\Pi)$. В общем случае полосы П* не образуют поверхности. Ищется такое однопараметрическое семейство линий $\{L\}$ на произвольной поверхности S, для которого может быть определена совокупность проективных преобразований $\{P\}$ так, чтобы полосы П* образовывали новую поверхность.

Для решения задачи строится канонический репер $MM_1M_2M_3$ линии L на поверхности (см. Щербаков Р. Н., Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 6, 804—806).

Полосы П* образуют поверхность, если образы $P(M_1)$ и $P(M_2)$ точек M_1 и M_2 (лежащих в касательной плоскости поверхности S) будут лежать в касательной плоскости поверхности $P(M) = \{M^*\}$ в точке M^*.

Задача имеет решение для любой исходной поверхности, если пользоваться полосами однопараметрического семейства плоских линий поверхности.

Та же задача ставится для случая эквиаффинных преобразований. Здесь выделяется класс линий, для которых задача имеет решение при любой исходной поверхности. К этому классу относятся однопараметрические семейства цилиндрических и плоских линий.

Та же задача ставится для случая преобразований движения. Здесь также выделяется класс линий, для однопараметрического семейства которых задача имеет решение на любой поверхности; в этот класс входят цилиндрические линии.

Если брать в качестве преобразования только параллельный перенос, получаем, что задача имеет решение только для цилиндрических линий.

Плоские линии на произвольной поверхности не дают возможности построения новой поверхности при помощи движения.

Решение последней задачи дополняет исследования Д. Ф. Егорова об образовании поверхностей линиями при помощи движения (Егоров Д. Ф., Мат. сб., 1923, **31(73)**:2, 153—184). *М. В. Потоцкий*

881. Теорема Бельтрами для параболических точек поверхности. Урбан (Beltramiho věta pro parabolické body plochy. Urban Alois), Casop. pěstov. mat., 1953, **77**, № 4, 373—381 (чеш.)

В параболической точке поверхности рассматриваются соотношения между кривизнами, кручениями и геодезическими кривизнами асимптотических линий и линий, имеющих с асимптотическими общую касательную и общую соприкасающуюся плоскости; точки уплощения исключаются, ввиду чего говорится об обыкновенных параболических точках. Полученные результаты должны служить аналогами соответствующих соотношений для точек гиперболического типа (теоремы Бельтрами и Бонне). Вначале устанавливается, что для рассматриваемых кривых в параболической точке обращается в нуль произведение кривизны и кручения; точки с кривизной, равной нулю (называемые автором «стационарными»), исключаются из рассмотрения. Пользуясь деривационными формулами для кривых, лежащих на поверхности, автор получает следующие теоремы:

1) Пусть обычная параболическая точка поверхности не стационарна для асимптотических линий; тогда: а) она не стационарна для линии пересечения поверхности с ее касательной плоскостью в данной точке; б) для геодезических кривизн k^1 и k^2 обеих ветвей этой линии пересечения и для геодезических кривизн $k_a^{(1)}$ и $k_a^{(2)}$ обеих асимптотических имеют место соотношения

$$k_a^{(1)}k_a^{(2)} = \frac{3}{2}k^{(1)}k^{(2)}; \quad k_a^{(1)} + k_a^{(2)} = \frac{5}{4}(k^{(1)} + k^{(2)}).$$

2) Необходимое и достаточное условие того, чтобы в обыкновенной параболической точке поверхности, нестационарной для асимптотических линий, для одной из асимптотических и для одной из ветвей линии пересечения поверхности с ее касательной плоскостью имело место соотношение Бельтрами между геодезическими кривизнами $k_a = \frac{3}{2}k$, состоит в равенстве геодезических кривизн обеих ветвей указанной линии пересечения.

Ко второй теореме приведены примеры. Указаний на характер условий, налагаемых на степень гладкости поверхности, не имеется. Референт считает, что теорема 2 является прямым следствием теоремы 1. *В. В. Рыжков*

882. Одно свойство минимальных поверхностей. Финн (A property of minimal surfaces. Finn Robert), Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1953, **39**, № 3, 197—201 (англ.)

Если $f(x, y)$ — гармоническая в открытой плоской области D функция, ограниченная по величине некоторой константой M, то, как известно, в произвольной точке $X_0 = (x_0, y_0)$ области D выражение $f_x^2 + f_y^2$ имеет верхнюю границу, которая зависит от M и от расстояния (x_0, y_0) до границы области D, но не зависит от рассматриваемой функции. Доказывается аналогичное свойство для решения уравнения минимальных поверхностей и формулируются без доказательства свойства решения родственного класса уравнений. Все рассматриваемые функции, за некоторым исключением, дважды непрерывно дифференцируемы.

Теорема 1. Если F — область всех внутренних точек D, расстояние которых от границы Γ области D не меньше, чем $d > 0$, то существует положительное число $K_D(\mathfrak{N}, d)$, обладающее следующими свойствами:

1) если $\varphi(x, y)$ — однозначное решение в D уравнения минимальной поверхности

$$(1 + q^2)\varphi_{xx} - 2pq\varphi_{xy} + (1 + p^2)\varphi_{yy} = 0, \quad p = \varphi_x,\ q = \varphi_y, \tag{1}$$

и площадь поверхности $z = \varphi(x, y)$ меньше числа $\mathfrak{N}$, то $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \leqslant K_D(\mathfrak{N}, d)$ в любой точке F;

2) при этом $K_D(\mathfrak{N}, d)$ — функция не убывающая по $\mathfrak{N}$ для каждого фиксированного d и не возрастающая по d для каждого фиксированного $\mathfrak{N}$.

Следствие. Если при этом $|\varphi(x, y)| < M < \infty$, то существует функция $K_D^*(M, d)$ такая, что $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \leqslant K_D^*(M, d)$ в любой точке F.

Эти свойства минимальных поверхностей можно обобщить. Существует вполне определенный класс C квазилинейных эллиптических уравнений в частных производных, подобных по структуре уравнению (1), для которых имеют силу и теорема 1, и ее следствие. Класс C содержит все уравнения вида

$$(\rho\varphi_x)_x + (\rho\varphi_y)_y = 0, \tag{2}$$

$$\rho = 1/W + \lambda\varepsilon(t), \quad W^2 = 1 + t, \quad t = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$$

при условии, что $\varepsilon(t) = O(t^{-3/2})$, $\left|\frac{d\varepsilon}{dt}\right| = O(t^{-5/2})$ при $t \to \infty$ и λ — действительное число, достаточно большое, чтобы $\rho W^4[\rho(t) + 2\rho'(t)t] > h^2 > 0$ для всех $t \geqslant 0$. При доказательстве применяется лемма о существовании предельной функции w^*, удовлетворяющей принципу максимума модуля, для некоторой подпоследовательности данной последовательности $\{w^{(n)}\}$ функций комплексного переменного, дважды непрерывно дифференцируемых в D; причем $|w^{(n)}(x, y)| < 1$ и обладает равномерно ограниченным эксцентриситетом для всех n. Эксцентриситет e функции $w = u + iv$ в точке $z = x + iy$ определяется как

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{Q_1}\right), \quad \text{где } Q_1 = \overline{\lim}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|,$$

$$Q_2 = \underline{\lim}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right| \text{ при } \triangle z \to 0.$$

Если u и v имеют непрерывные первые производные, то

$$e = (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \,/\, 2J\begin{pmatrix} u, & v \\ x, & y \end{pmatrix}, \quad J \neq 0.$$

Если $\varphi(x, y)$ есть решение в D квазилинейного эллиптического уравнения

$$a(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xx} + 2b(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xy} + c(x, y, \varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{yy} = 0, \quad (3)$$
$$ac - b^2 = 1,$$

то вторые производные от $\varphi(x, y)$ в круге C (радиуса d, лежащего в D) удовлетворяют условию Гёльдера, которое зависит только от d и от $\sup_C (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi^{(n)}(x, y)\}$ — последовательность однозначных решений уравнения класса C в области D, пусть поверхности $z = \varphi^{(n)}(x, y)$ равномерно ограничены по площади для всех n и пусть существует в области D точка (x_0, y_0), в которой $|\varphi^{(n)}(x_0, y)| \leqslant K < \infty$ для каждого n. Тогда существует подпоследовательность решений, которая (вместе с соответствующей последовательностью производных до второго порядка) сходится всюду в D. Сходимость равномерна в каждой компактной подобласти D, и предельная функция является решением уравнения в D.

Для уравнения типа (3) формулируется теорема, аналогичная задаче Дирихле (ссылка на работы С. Н. Бернштейна, Math. Ann., 1910, **69**, 126; Leray J., Schauder J., Ann. École Normale Sup., 1934, **51**, 69—70).

Теорема 3. Пусть D — выпуклая область, Γ — ее граница с неисчезающей кривизной, описанная дважды непрерывно дифференцируемыми по длине дуги функциями, и φ^* — непрерывная функция, определенная на Γ. Тогда для любого уравнения класса C существует единственная функция $\varphi(x, y)$, которая всюду в D является его решением и обращается по непрерывности в φ^* на границе Γ.

В. С. Люкшин

883. К проективной геометрии линейных элементов пятого и четвертого порядков. Штрёэр (Zur projektiven Geometrie der Linienelemente fünfter und vierter Ordnung. Ströher Wolfgang), Monatsh. Math., 1953, **57**, 19—28 (нем.)

Линейный элемент порядка k определяется точкой и ее k последовательными дифференциалами.

Через каждый линейный элемент 5-го порядка проходит ∞^1 W-кривых 2-го рода (W-кривая 2-го рода получается проективным преобразованием из кривой $y = e^x$; при этом точки ветвления и двойные точки будут соответственно образами несобственных точек оси OY и оси OX, прямая ветвления — образ оси OX и двойная прямая — образ несобственной прямой).

Геометрическое место двойных точек этого семейства W-кривых, геометрическое место их точек ветвления, огибающая двойных прямых и огибающая прямых ветвления являются кривыми 2-го порядка. Они принадлежат пучку, образованному соприкасающейся кривой 2-го порядка C и сдвоенной касательной. При этом первые две кривые образуют с этими последними двойное отношение, равное — 2, первая и третья, вторая и четвертая кривые разделяются ими гармонически.

У ∞^1 W-кривых 2-го рода, проходящих через линейный элемент 4-го порядка и имеющих в нем общую проективную нормаль, двойные точки описывают кривую 2-го порядка, автополярную относительно кривой C и касающуюся ее в точках пересечения с проективной нормалью; двойные прямые огибают эту же кривую. Геометрическим местом точек ветвления и огибающей прямых ветвления являются два конических сечения, принадлежащих пучку, образованному кривой C и сдвоенной проективной нормалью. Инвариант Мемке этих кривых относительно кривой C равен соответственно $^4/_5$ и $^5/_4$.

А. М. Васильев

884. Замечание об аналитических точечных преобразованиях евклидова пространства. Мураккини (Osservazioni sulle trasformazioni puntuali analitiche fra spazi euclidei. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 40—43 (итал.)

В статье находятся два характеристических свойства подобия. Показывается, что:

1. Всякое точечное аналитическое преобразование евклидовой плоскости, являющееся конформным и сохраняющее отношение площадей (в оригинале: «сохраняющее площади»), есть подобие.

2. Всякое точечное аналитическое преобразование евклидова пространства, сохраняющее отношение площадей (в оригинале: «сохраняющее площади»), есть подобие.

Для доказательства данное преобразование записывается при помощи неизвестных функций в прямоугольной системе координат. Условия теорем выражаются системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Интегрирование этой системы в первом случае непосредственно приводит к доказательству теоремы, а во втором приводит к заключению, что данное преобразование конформно (значит, есть подобие или инверсия) и сохраняет отношение объемов (что исключает инверсию).

Н. М. Бескин

885. Огибающие и дискриминантные кривые. Хартман, Винтнер (Envelopes and discriminant curves. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 142—158 (англ.)

Критерий Коши для выделения огибающей из дискриминантной кривой можно сформулировать так:

Если после замены переменных, переводящей дискриминантную кривую в ось x, для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, будет выполняться тождество $f(x, 0) \equiv 0$ и найдется функция $\varphi(y)$ такая, что

$$f(x, y) < \varphi(y), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(y) > 0 \text{ при } y > 0,$$
$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} < \infty,$$

то дискриминантная кривая будет огибающей решений уравнения (1).

Этот признак применяется к уравнению

$$a(x, y)\,dx^2 + 2b(x, y)\,dxdy + c(x, y)\,dy^2 = 0. \quad (2)$$

Если все коэффициенты a, b, c — функции класса C^1 и в некоторой точке дискриминантной кривой они одновременно не обращаются в нуль, то интегральная дискриминантная кривая всегда огибающая. Если же дискриминантная кривая в какой-либо точке не имеет интегрального направления, то она не является огибающей и из каждой точки ее исходят две интегральные кривые. Если уравнение (2) — уравнение асимптотических линий, то параболическая линия будет огибающей, когда она сама по себе асимптотическая.

Если же найдется линия, для которой все три коэффициента уравнения (2) обращаются в нуль, то при условии, что коэффициенты — функции класса C^2 и сумма модулей их градиентов не равна нулю, дискриминантная кривая не будет огибающей (является линией «особых точек»). Интегральные кривые образуют два различных семейства, каждое из которых гладко покрывает рассматриваемую область. Если уравнение (2) является уравнением линий кривизны и кубичная форма Фубини поверхности не равна нулю, то омбилическая линия не является огибающей, и линии кривизны вблизи каждой ее точки образуют гладкое покрытие.

М. В. Ауссем

886. **О кривизнах поверхности. Хартман, Винтнер** (On the curvatures of a surface. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 127—141 (англ.)

Статья относится к циклу работ тех же авторов, печатающихся в Amer. J. Math. с 1950 г., в которых исследуются различные вопросы дифференциальной геометрии поверхности определенного класса C^n (классом поверхности называется класс векторной функции $X = X(u, v)$, определяющей поверхность).

В статье доказывается, что если поверхность S допускает параметрическое представление $X = X(u, v)$ класса C^n, $n \geqslant 2$, и средняя кривизна $H(u, v)$ есть функция класса C^n, то S допускает также параметрическое представление класса C^{n+1}.

Доказывается также аналогичная теорема с заменой средней кривизны $H(u, v)$ на гауссову кривизну $K(u, v)$; только в этом последнем случае авторы требуют, чтобы n было больше 2 и чтобы гауссова кривизна $K(u, v)$ была положительной. При этом требование положительности K является существенным, а вопрос о том, справедлива ли теорема при $n = 2$, остается открытым.

Обе теоремы теряют силу, если $H(u, v)$, соответственно $K(u, v)$, есть функция класса C^{n-1}, а не C^n (впрочем, если $H(u, v)$ есть функция класса C^{n-1} и ее производные $(n-1)$-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера, то первая сформулированная теорема остается верной). Точнее, если поверхность S класса C^n, $n > 2$, обладает следующими тремя свойствами: 1) гауссова кривизна $K(u, v)$ есть функция класса C^{n-1}; 2) средняя кривизна $H(u, v)$ есть функция класса C^{n-1}; 3) поверхность S не имеет омбилических точек, то S допускает параметризацию класса C^{n+1}. Если хотя бы одно из этих трех условий нарушено, то теорема теряет силу. Последнее утверждение справедливо и при $n = 2$; вопрос же о том, справедливо ли и первое утверждение при $n = 2$, остается открытым (показывается лишь, что для поверхностей постоянной гауссовой или средней кривизны оно сохраняет силу и при $n = 2$).

В последней части статьи рассматриваются поверхности, для которых коэффициенты второй основной квадратичной формы $h_{ij}(u, v)$ $(i, j = 1,2)$ принадлежат определенному классу. Доказывается, что если для поверхности S класса C^n, $n \geqslant 2$, $h_{ij}(u, v)$ — функции класса C^{n-1}, то S допускает представление класса C^{n+1}; эта теорема справедлива даже, если известно лишь, что функции $h_{11}(u, v)$ и $h_{22}(u, v)$ класса C^{n-1}. Отсюда, в частности, вытекает, что если поверхность S допускает параметрическое представление класса C^n, $n \geqslant 2$, для которого линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ — асимптотические линии (т. е. $h_{11} = h_{22} = 0$), то S допускает представление класса C^{n+1}. Эта теорема теряет силу, если заменить в ее условии асимптотические линии линиями кривизны (т. е. условие $h_{11} = h_{22} = 0$ — условием $h_{12} = 0$); однако если дополнительно потребовать еще, чтобы $H(u, v)$ была функцией класса C^{n-1} или $K(u, v) \neq 0$ была функцией класса C^{n-1}, то теорема становится верной.

Все исследование базируется на теории дифференциальных уравнений в частных производных.

И. М. Яглом

887. **О третьей основной форме поверхности. Хартман, Винтнер** (On the third fundamental form of a surface. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 2, 298—334 (англ.)

Доказывается ряд теорем классической теории поверхностей при ослабленных требованиях на дифференцируемость рассматриваемых функций. Например, теорема о том, что вторая и третья основные квадратичные формы поверхности определяют поверхность с точностью до движения, доказывается в предположении, что поверхность принадлежит к классу C^2 (класс C^n — класс поверхностей, декартовы координаты точек которых допускают непрерывные частные производные n-го порядка по параметрам поверхности), в то время как в классической теории эта теорема доказывается в предположении, что поверхность принадлежит к классу C^4; отличие от классической теории состоит здесь в том, что выбирается специальная «нормальная» параметризация, условие равенства кривизны третьей формы единице записывается в интегральной форме и условия Петерсона — Кодацц заменяются интегральным соотношением между коэффициентами второй формы и символами Кристоффеля третьей формы. В приложении доказывается теорема А. В. Погорелова (Докл. АН СССР, 1948, 62, 297—299) в предположении, что две из рассмат-

риваемых в ней поверхностей принадлежат к классам C^2 и C^3, а не C^3 и C^4. *Б. А. Розенфельд*

888 **РеЦ. Введение в свободную геометрию плоских кривых. Лохер-Эрнст** (Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven. Locher-Ernst L., pp. 85, Birkhäuser, Basel, 1952, 12.50 Sw. fr.) [**Рецензия:** (E. J. F. P.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 149—150 (англ.)]

ГЕОМЕТРИЯ ВЛОЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

889. **Об уравнениях вложения риманова пространства V_n в риманово пространство V_{n+k} постоянной кривизны. Хуан Чжэн-чжун** (On the equations of imbedding of a Riemannian space V_n immersed in a V_{n+k} of constant curvature. Hwang Cheng-chung), Sci. Record, **5**, № 1—4, 23—27 (англ.)

Исследуются алгебраические зависимости между уравнениями Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи для многомерной поверхности V_n в пространстве V_{n+k} постоянной кривизны.

В первой теореме формулируются алгебраические ограничения, накладываемые на тензоры вложения b_{ij}^a $(i, j = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, k)$, при выполнении которых в случае достаточно большого n $(n \geqslant 3k-3)$ условия Риччи вытекают как алгебраически-дифференциальные следствия условий Гаусса и Петерсона — Кодацци.

Вторая теорема устанавливает что если ранг тензора b_{ij}^k больше 3, то соответствующие этому тензору условия Петерсона — Кодацци

$$b_{ij}^k{}_{|m} + b_{im}^k{}_{|j} = \sum_{s=1}^{k-1} \left[b_{ij}^s T_m^{ks} - b_{im}^s T_j^{ks} \right], \quad i, j, m = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяются как необходимые следствия уравнений Гаусса и остальных условий Петерсона — Кодацци.

Обе теоремы являются обобщением соответствующих результатов Л. Л. Вербицкого, сформулированных для поверхности V_n в E_{n+2} (Вербицкий Л. Л., Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу с приложениями к геометрии, механике и физике, 1950, VIII, 425—429).

Н. Н. Яненко

890. **О поверхности проективного пространства S_n, содержащей двойную сопряженную сеть. Дала Вольта** (Sulle superficie di S_n possedenti un doppio sistema coniugato. Dalla Volta Vittorio), Boll Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 1, 29—36 (итал.)

Сопряженной сетью называется, как известно, координатная сеть линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ двумерной поверхности Φ n-мерного проективного пространства S_n, если любая однородная координата точки P этой поверхности удовлетворяет уравнению Лапласа

$$Z_{uv} = cZ + aZ_u + bZ_v. \qquad (*)$$

Эта сеть характеризуется также тем, что на касательных к ее линиям существуют точки P_1 и P_{-1}, которые описывают поверхности Φ_1 и Φ_{-1} так, что прямые PP_1 и PP_{-1} касаются этих поверхностей в точках P_1 и P_{-1} соответственно. Поверхности Φ_1 и Φ_{-1} называются преобразованиями Лапласа поверхности Φ. Инвариантами Лапласа — Дарбу уравнения $(*)$ называются выражения

$$h = c + ab - a_u; \qquad k = c + ab - b_v.$$

В предположении $hk \neq 0$, в работе доказывается следующая теорема.

При $h \neq k$ всякой неособенной точке P поверхности Φ соответствуют $\infty^{n(n+3)/2-12}$ гиперквадрик пространства S_n $(n \geqslant 4)$, которые содержат окрестности второго порядка точек P_1 и P_{-1} на поверхностях Φ_1 и Φ_{-1}, и все эти гиперквадрики содержат касательную плоскость к Φ в P; в пространстве S_4 они вырождаются в конусы с вершиной в P. При $h = k$ число этих гиперквадрик возрастает до $\infty^{n(n+3)/2-11}$, но они не обязательно проходят через P.

Автор доказывает эту теорему синтетически, отмечая, что ее вторая часть была доказана аналитическим методом в работе Сюна (Hsiung C. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, № 2, 312—322).

А. П. Норден

891. **К теории поверхностей в проективном пространстве. Либер А. Е.**, Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 2, 137—140.

Точки n-мерного проективного пространства P_n ставятся во взаимно однозначное соответствие с псевдовекторами векторного пространства B_{n+1}. Векторы пространства B_{n+1} обозначаются полужирными буквами.

Поверхность $X_m \subset P_n$ определяется уравнением $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\eta_a)$ $(a, b, c = 1, \ldots, m)$. Многообразие P_{m+1}, принадлежащее касательному P_m и не проходящее через точку $\mathfrak{X}$, определяет нормаль 2-го рода в смысле Нордена и определяется точками $\mathfrak{X}_a = \partial_a \mathfrak{X} + \gamma_a \mathfrak{X}$, а точки $\mathfrak{n}_p$ $(p, q = 1, \ldots, n-m)$ определяют вместе с точкой $\mathfrak{X}$ нормаль 1-го рода.

Задание нормали 2-го рода определяет линейную связность в многообразиях B_1 пространства B_{n+1}; задание нормали 1-го рода определяет аффинную связность в касательных плоскостях (внутреннюю связность X_m в смысле Нордена), а коэффициенты при $\mathfrak{n}_q$ в разложениях $\partial_a \mathfrak{n}_p$ определяют связность в многообразиях, соответствующих нормалям 1-го рода.

Пользуясь ковариантным дифференцированием в каждой из этих связностей, можно привести основные дифференциальные уравнения поверхности X_m к виду

$$D_a \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_a, \quad D_a \mathfrak{X}_b = h_{ab}^p \mathfrak{n}_p + g_{ab} \mathfrak{X},$$

$$D_a \mathfrak{n}_p = h_{ap}^c \mathfrak{X}_c + w_{ap} \mathfrak{X}$$

и составить их условия интегрируемости. Задание объектов трех перечисленных связностей и связующих аффиноров γ_a, h_{ab}^p, h_{ap}^c, g_{ab}, w_{ap}, удовлетворяю-

щих условиям интегрируемости, определяет дооснащенную (нормализованную) поверхность X_m с точностью до автоморфизмов P_n.

Устанавливая закон преобразования всех введенных объектов и рассматривая их инварианты, автор строит инвариантную нормализацию поверхности X_m при условии

$$m^2 + 3m \leqslant 2n.$$

А. П. Норден

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

892. Заметка по поводу статьи Левина: «Поля параллельных векторов в проективно плоских пространствах». **В а н Ю н - ч ж о у** (A note on Levine's paper: «Fields of parallel vectors in projectively flat spaces». W o n g Y u n g - c h o w), Duke Math. J., 1953, 20, № 1, 119—125 (англ.)

В статье Левина (Duke Math. J., 1949, 16, 23—32) были получены канонические формы для коэффициентов симметрической аффинной связности Γ^i_{jk} проективно евклидовых пространств P_N, допускающих поля параллельных векторов. Автор заметки обнаружил неправильность в трактовке случая $N = 2$, вызванную необоснованным для этого случая допущением симметричности тензора Риччи. Приводятся новые доказательства некоторых теорем Левина и их следствий, находится простой признак для пространств P_N, допускающих поля ковариантных параллельных векторов, и исправляется исследование пространств P_2, допускающих поля контравариантных параллельных векторов; при этом находятся соответствующие канонические формы для коэффициентов связности. *Б. Л. Лаптев*

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

893. Критическое множество выпуклого тела. **К л и** (The critical set of a convex body. K l e e V. L., Jr.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 1, 178—188 (англ.)

Пусть x — произвольная внутренняя точка выпуклого тела C в E^n; y — произвольная точка на его границе F и z — точка границы тела на продолжении отрезка xy. Пусть $r_C(x) = \sup\limits_{y \subset F} \overline{xy} / \overline{yz}$. Тогда под критическим значением r_C для тела C понимают величину

$$r_C = \inf_{x \subset C} r_C(x).$$

Множество C^* точек x тела C, для которых $r_C = r_C(x)$, называется критическим множеством. Это множество исследовалось многими авторами.

Доказывается неравенство:

$$r_C(1 - r_C)^{-1} + \dim C^* \leqslant n;$$

показывается также, что $r_C = n/(n+1)$ тогда и только тогда, когда C — симплекс; кроме того, известная теорема Хелли о пересечении выпуклых тел доказывается при более общих, чем обычно, предположениях. *А. В. Погорелов*

894. Объем некоторых сферических многогранников любого числа измерений. **В а р т** (The content of certain spherical polyhedra for any number of dimensions. V a a r t H. R. van der), Experientia, 1953, 9, № 3, 88—89 (англ.)

Приводится формула для $(n-1)$-мерного объема поверхности сферического многогранника

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

(многочлены $\sum\limits_k b_{ik} x_k$ линейно независимы) в предположении, что при $C_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik} b_{jk}$

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - j = 0 \\ 0, & \text{если } |i-j| \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\text{и } |C_{ij}| < 1, \text{ если } |i-j| = 1. \tag{2}$$

Для этого случая (сферических ортосхем) объем выражается следующей формулой:

$$V_{n-1} = (\pi/2)^m \prod_{k=1}^{m-1} (n-2k)^{-1} \cdot \sum_{s=0}^{m} (2/\pi)^s I_s, \tag{3}$$

где $m = [{}^1\!/_2 n]$, $I_0 = 1$, а при $0 < s \leqslant m$

$$I_s = \sum_{i_1, \ldots, i_s} \int_0^{C_{i_1 j_1}} \cdots \int_0^{C_{i_s j_s}} |e_{gh}|^{-1/2} dz_{i_1 j_1} \ldots dz_{i_s j_s}, \tag{3'}$$

$i_1, \ldots, i_s$ принимают значения $1, \ldots, n-1$; $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ и $|i_p - i_q| \geqslant 2$; $j_p = i_p + 1$ $(p = 1, \ldots, s)$; $|e_{gh}|$ детерминант порядка $2s$ $(g, h = i_1, j_1, \ldots, i_s, j_s)$, элементы которого определяются условиями: $e_{gh} = z_{gh}$, когда $g = i_p$, $h = j_p$ и $e_{gh} = C_{gh}$ в остальных случаях.

С задачей определения $(n-1)$-мерного объема многогранника (1) автор встретился в одном вопросе статистики. Ею занимался еще в 1852 г. Шлефли (Schläfli L., Neue Denkschr. schweiz. Gesell. Naturwissenschaften, 1901, 38), составивший соответствующую систему линейных уравнений в частных производных первого порядка, решением которой при условии (2) и является указанная формула.

А. Г. Школьник

См. также 532, 542, 543, 595, 596, 621, 703, 744, 757, 788, 793, 807, 1001. Работы по номографии см. в отделе «Численные и графические методы».

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

895. Применение операторного многочлена Чебышева при численном решении краевых задач. Шортли (Use of Tschebyscheff-polynomial operators in the numerical solution of boundary-value problems. Shortley George), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 4, 392—396 (англ.)

Предлагаемый метод решения граничных задач, основанный на применении многочлена Чебышева, наименее уклоняющегося от нуля, тесно связан с ранее опубликованной совместной работой Шортли и Фландерса (Shortley George, Flanders Donald A., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1950, **21**, № 4, 1326). Метод иллюстрируется на решении задачи Пуассона

$$\Delta u + \alpha(x, y) = 0$$

для некоторой плоской области. Соответствующие разностные уравнения имеют вид:

$$Ou_{ij} = \omega u_{ij} + \frac{1}{4} h^2 \alpha_{ij} = u_{ij}, \qquad (1)$$

где

$$\omega u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,\,j} + u_{i-1,\,j} + u_{i,\,j+1} + u_{i,\,j-1}).$$

Обычный способ решения (1) заключается в том, что исходят из какой-либо системы τ_{ij}, удовлетворяющей граничным условиям, и в качестве приближенного решения (1) берут итерацию $O^n r_{ij}$ достаточно высокого порядка n.

Операция O^n есть частный случай более общей операции $P_n(O)$, где $P_n(\lambda)$ — алгебраический многочлен степени n, удовлетворяющий условию $P_n(1) = 1$. Соответственно в качестве приближения решения (1) можно взять

$$U_{ij} = P_n(O\tau_{ij}).$$

Оказывается, что в известном смысле наиболее выгодным при данном n среди таких приближений является то, которое соответствует многочлену Чебышева

$$P_n(\lambda) = T_n(\lambda / \lambda_1) / T_n(1 / \lambda_1),$$

где

$$T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

а $(-\lambda_1, \lambda_1)$ есть отрезок, внутри которого находятся все собственные значения уравнения

$$\omega v_{ik} = \lambda v_{ik}$$

при $v_{ik} = 0$ на границе области. Здесь всегда $0 \leqslant \lambda_1 < 1$.

Если область есть квадрат, который делится на $N = p \times p$ частичных квадратов, чтобы достичь приближения с ошибкой, меньшей ε, надо при обычном методе, соответствующем O^n, взять в качестве n величину порядка $N \lg \varepsilon$. Применение многочлена Чебышева дает возможность достичь той же ошибки для n, имеющего порядок $\sqrt{N} \lg \varepsilon$. *С. М. Никольский*

896. Об аппроксимации линейных эллиптических дифференциальных уравнений разностными уравнениями с положительными коэффициентами. Моцкин, Вазов (On the approximation of linear elliptic differential equations by difference equations with positive coefficients. Motzkin T. S., Wasow W.), J. Math. and Phys., 1953, **31**, № 4, 253—259 (англ.)

Изучается возможность замены эллиптического оператора

$$L[u] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u \qquad (1)$$

разностным

$$L_h[u] = \sum_{s=0}^{N} c_s(x, h)\, u(x + m_s h), \qquad (2)$$

где m_s — n-мерные векторы с целочисленными компонентами m_{sj} $(j = 1, \cdots, n)$, $m_0 = (0, \cdots, 0)$, h — шаг решетки. На $L_h[u]$ накладываются следующие условия: а) если в (2) вместо $u(x + m_s h)$ подставить первые три члена их разложений в строку Тейлора в точке x, то должно получиться выражение, пропорциональное $L[u]$, точнее, должны тождественно по x и h выполняться равенства:

$$\sum_{s=0}^{N} c_s(x, h) = h^2 \lambda(x, h)\, c(x),$$

$$\sum_{s=1}^{N} c_s(x, h)\, m_{sj} = h \lambda(x, h)\, b_j(x) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

$$\sum_{s=1}^{N} c_s(x, h)\, m_{si} m_{sj} = \lambda(x, h)\, a_{ij}(x) \quad (i, j = 1, \cdots, n),$$

причем $\lambda(x, h) \neq 0$;

б) $$c_s(x, h) > 0 \ (s \neq 0), \ c_0(x, h) < 0, \qquad (3)$$

или

$$c_s(x, h) \geqslant 0 \ (s \neq 0), \ c_0(x, h) \leqslant 0. \qquad (4)$$

Доказано, что для всех эллиптических операторов (1) невозможно найти совокупность векторов m_s $(s = 1, \cdots, N)$, для которой выражения $L_h[u]$ удовлетворяли бы условиям а) и б) в форме (4) хотя бы в одной точке x. Однако, если совокупность эллиптических операторов (1) такова, что коэффициенты L равномерно ограничены в конечной области $\overline{B}$ и $\mathrm{Det}\{a_{ij}\} \geqslant \mathrm{const} > 0$, то для нее можно определить векторы m_s $(s = 1, \cdots, N)$ так, чтобы $L_h[u]$ удовлетворяли в B условиям а) и б) в форме (3).

Даны достаточные условия, наложенные на c_s, при которых для решений уравнения $L_h[u]$ имеет место принцип максимума. *О. А. Ладыженская*

897. О собственных значениях конечноразностных аппроксимаций оператора Лапласа. Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 613—616

В работе Л. А. Люстерника (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1947, 20, 49—64) было показано, что конечноразностные аппроксимации дифференциальных операторов могут обладать «паразитическими» собственными значениями, т. е. собственными значениями, не являющимися приближением собственных значений аппроксимируемого оператора. Там же было отмечено, что эти паразитические собственные значения влияют на сходимость и расходимость итерационных процессов, в которых эти аппроксимации участвуют.

В настоящей работе рассматривается оператор усреднения S, переводящий функцию $f(A)$, заданную в узлах $\{A, B, \cdots\}$ плоской сетки, в функцию $Sf(A) = \sum_B c(A, B) f(B)$, где для каждой точки A $c(A, B) \neq 0$ лишь для конечного числа точек B и $c(A, B) \geqslant 0$, $\sum_B c(A, B) = 1$, $c(A, A) = 0$. Для сетки, покрывающей всю плоскость и состоящей из правильных многоугольников, оператор S определен на гильбертовом пространстве H, порожденном всеми почти периодическими функциями $\varphi(A)$, определенными в узлах A сетки. При условии, что $c(A, B) = d(B - A)$, оператор S оказывается ограниченным самосопряженным в H оператором. Верхняя граница спектра оператора S равна единице, нижняя же граница $\mu(S)$ этого спектра всегда меньше нуля. Указаны значения $\mu(S)$ для различных операторов усреднения на сетках из квадратов и правильных треугольников и выписаны выражения (приближенные) этих операторов через оператор Лапласа и его итерации. Для сетки, покрывающей лишь конечную часть плоскости, сформулирована теорема о том, что при шаге h сетки, стремящемся к нулю (условие $h \to \infty$ в формулировке теоремы является опечаткой), наибольшее и наименьшее собственные значения конечномерного оператора, порожденного оператором S, стремятся соответственно к единице и к $\mu(S)$.

Из этой теоремы вытекают следующие факты. При решении для конечной сетки системы уравнений $\varphi(A) = S\varphi(A)$ при заданных граничных условиях методом итераций по формуле

$$\varphi_{n+1}A = \frac{S\varphi_n(A) - \alpha\varphi_n(A)}{1 - \alpha}$$

последовательность $\varphi_n(A)$ стремится к решению $\varphi(A)$ при $\alpha \leqslant \frac{1 + \mu(S)}{2}$, при $\alpha > \frac{1 + \mu(S)}{2}$ и достаточно малом h последовательность $\varphi_n(A)$ расходится. Далее, если дифференциальное уравнение $\frac{\partial \varphi(A, t)}{\partial t} = \Delta\varphi(A, t)$ заменить конечноразностным уравнением $\frac{\varphi_{n+1}(A) - \varphi_n(A)}{\tau} = \frac{S - 1}{Mh^2}\varphi_n(A)$, где $\varphi_n(A) = \varphi(A, n\tau)$, то при $\tau \leqslant \alpha h^2$, где $\alpha = 2M[1 - \mu(S)]^{-1}$, решение разностного уравнения устойчиво и при $h \to 0$ решение смешанной задачи для конечноразностной аппроксимации стремится к решению соответственной задачи для дифференциального уравнения. При $\tau > \alpha h^2$ имеют место неустойчивость и расходимость при $h \to 0$. Для гиперболического уравнения $\frac{\partial^2 \varphi(A, t)}{\partial t^2} = \Delta\varphi(A, t)$ и его конечноразностной аппроксимации

$$\frac{\varphi_{n+1}(A) - 2\varphi_n(A) + \varphi_{n-1}(A)}{\tau^2} = \frac{S - 1}{Mh^2}\varphi_n(A)$$

области устойчивости и неустойчивости определяются соответственно неравенствами $\tau \leqslant h\sqrt{\frac{4M}{1 - \mu(S)}}$ и $\tau > h\sqrt{\frac{4M}{1 - \mu(S)}}$.

Чтение реферируемой работы затруднено большим количеством опечаток. *М. Р. Шура-Бура*

898. Оценки погрешностей приближенных решений линейных задач. Слободянский М. Г., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 2, 229—244

Пусть положительно определенные в некотором гильбертовом пространстве операторы A, A_1, A_2 связаны неравенством $A_2 \leqslant A \leqslant A_1$ и пусть $u_0 = A^{-1}f$, $u_{0i} = A_i^{-1}f$, $v_{0i} = A_i^{-1}\psi$ $(i = 1, 2)$, где f и ψ — данные элементы пространства. Выводится оценка

$$\left|\left(\psi,\ u_0 - \frac{1}{2}(u_{01} + u_{02})\right)\right| < \frac{1}{2}\sqrt{(f, u_{01} - u_{02})(\psi, v_{01} - v_{02})}.$$

В частном случае, когда $A_i = \lambda_i A_0$, $(i = 1, 2)$, где A_0 — положительно определенный оператор и $\lambda_2 < \lambda_1$ — положительные числа, автор приходит к оценке

$$(A_0(u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*) < \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 (A_0 u_0^*,\ u_0^*);$$

$$u_0^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)A_0^{-1}f.$$

В этой оценке коэффициент меньше, чем аналогичный коэффициент в оценке, ранее полученной референтом (Докл. АН СССР, 1952, **84**, № 6, 909—912), которая отличается от оценки автора тем, что вместо u_0^* в нее входит элемент $A_0^{-1}f$.

Далее подробно излагается известное преобразование Фридрихса (см. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, 1, Гостехиздат, М., 1933, 222—233) в применении к краевым задачам для самосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения и для общего самосопряженного уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка. *С. Г. Михлин*

899. Приближенное решение некоторых краевых задач для эллиптического дифференциального уравнения и оценки погрешности. Слободянский М. Г., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 2, 221—224

Известное преобразование Фридрихса применяется к самосопряженному эллиптическому уравнению второго порядка. Результаты реферируемой

заметки подробно изложены в статье автора «Оценки погрешностей приближенных решений линейных задач» (см. реф. 898). *С. Г. Михлин*

900. Общие соображения об интерполяции и некоторых связанных с нею исследованиях. Пиконе (Allgemeine Gesichtspunkte zur Interpolation und einige durch sie angeregte Untersuchungen. Picone Mauro), Monatsh. Math., 1953, 57, 44—65 (нем.)

Пусть E — дифференциальный оператор в некоторой r-мерной области T; $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — однородные и дистрибутивные операторы, определенные для некоторого класса функций $\{u\}$. Предположим далее, что в классе $\{u\}$ однозначно разрешима система уравнений

$$\begin{cases} E[u] = e(P) \\ L_i[u] = l_i(P) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

где $e(P)$ и $l_i(P)$ — функции точки P в области T, и что соответствующая однородная задача

$$\begin{cases} E[u] = e(P) \\ L_i[u] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

решается при помощи формулы вида

$$u(P) = \int_T G(P, Q)\, e(Q)\, dT(Q),$$

причем $G(P, Q)$ — некоторая «функция Грина».

При таких предпосылках изучается интерполяция функции $f(P)$ посредством функции $u_f(P)$, являющейся решением системы

$$\begin{cases} E[u] = 0 \\ L_i[u] = L_i[f] \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Простейший случай, от которого отправляется автор, соответствует допущениям: T — отрезок $a \leqslant x \leqslant b$; $m = 2$, $L_1[u] = u(a)$, $L_2[u] = u(b)$;

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(b - x)(a - \xi)}{b - a} & \text{при } \xi \leqslant x, \\ \dfrac{(b - \xi)(a - x)}{b - a} & \text{при } \xi \geqslant x. \end{cases}$$

Рассматриваются многочисленные иные реализации приведенной выше схемы, в которых роль E играют:

1) $\triangle^\nu$, где $\triangle = \sum_{k=1}^{r} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, ν — целое положительное

2) $D^{2\nu}$, где $D = \dfrac{\partial^r}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_r}$;

3) пример интерполяции Эрмита посредством полиномов вида $P(z)/\theta(z)$, где $\theta(z)$ — функция, аналитическая и не обращающаяся в нуль в рассматриваемой комплексной области (так что $E[u] = \dfrac{d^n}{dz^n}\{\theta u\}$).

Реализация 3) в частном случае интерполяции Лагранжа была раньше рассмотрена Пеано (Peano, Accad. Torino, 1883). *В. Л. Гончаров*

901. Об одном классе итерационных процессов для решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Варга (On a class of iterative procedures for solving normal systems of ordinary differential equations. Warga J.), J. Math. and Phys., 1953, **31**, № 4, 223—243 (англ.)

Вектор-функция $f(u, t)$ (u — вектор, t — вещественный аргумент) обладает по определению свойством $P_A(z_0)$, если при $|t - t_0| \leqslant a$, $\|u - z_0\| \leqslant b$ она непрерывна, ограничена: $\|f(u, t)\| \leqslant M_f$ и удовлетворяет по u условию Липшица с постоянной K_f.

Пусть $y_0(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $y_0(t_0) = z_0$ и $\|y_0(t) - z_0\| \leqslant b$ при $|t - t_0| \leqslant \min(a, bM_f^{-1})$. Пусть вектор-функции $y_j(t)$ — решения уравнений $\dot{y}_j = G_j(y_j, t)$ такие, что $y_j(t_0) = z_0$. По определению функции $G_j(u, t)$ обладают «слабым свойством $P_I(f)$», если I) $\|G_j(u, t)\| \leqslant M_G$ в области $\overline{D}$: $|t - t_0| \leqslant T = \min(a, bM_f^{-1}, bM_G^{-1})$, $\|u - z_0\| \leqslant a$, II) они непрерывны в $\overline{D}$, III) удовлетворяют в $\overline{D}$ условию Липшица по u с постоянной K_G, IV) при $|t - t_0| \leqslant T$ разности $G_{j+1}(y_j(t), t) - f(y_j(t), t)$ в среднем порядка 1 сходятся к нулю при $j \to \infty$.

Функции $G_j(u, t)$ обладают «сильным свойством $P_I(f)$», если условие IV) заменено условием IV′): разности $G_{j+1}(y_j(t), t) - f(y_j(t), t)$ сходятся к нулю равномерно при $|t - t_0| \leqslant T$. Доказывается:

Теорема 1. Пусть $f(u, t)$ обладает свойством $P_A(z_0)$, а $G_j(u, t)$ удовлетворяют условиям I), II), III). Тогда условие IV) является необходимым и достаточным для того, чтобы $y_j(t)$ равномерно при $|t - t_0| \leqslant T$ сходились к решению $z(t)$ уравнения $\dot{z} = f(z, t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, а $\dot{y}(t)$ сходились в среднем порядка 1 к $\dot{z}(t)$. Условие IV′) необходимо и достаточно для равномерной сходимости $y_j(t)$ к $z(t)$ и $\dot{y}_j(t)$ к $\dot{z}(t)$.

Итерационные процессы, сходимость которых следует из теоремы 1, образуют класс I. При частном выборе функций $G_j(u, t)$ теорема 1 является обоснованием сходимости различных ранее известных процессов (обычный процесс Пикара, один из методов Л. В. Канторовича и др.) и двух новых, предлагаемых автором.

А-процесс, в котором

$$G_j(u, t) = A(u - y_{j-1}(t)) + f(y_{j-1}(t), t),$$

где A — постоянная матрица $(\partial / \partial u) f(z_0, t_0)$.

Итерационный процесс k-го порядка. Отрезок $[t_0, t_0 + T_1]$, на котором конструируются приближенные решения, разбивается на $2^j s$ частей равной длины h_j, где s — достаточно большое фиксированное натуральное число, кратное k. В $2^j s + 1$ точках деления вычисляются значения

компонент $f_\nu(y_j(t), t)$ вектора $f(y_j(t), t)$. Компоненты $G_{j+1,\nu}(u, t)$ вектор-функции $G_{j+1}(u, t)$ определяются как функции, состоящие из $2^j s/k$ дуг парабол k-го порядка, d-ая из которых проходит через $k+1$ точку $(t_{ji}, f_\nu(y_j(t_{ji})), t_{ji})$, $t_{ji} = t_0 + ih_j$, $(d-1)\,k \leqslant i \leqslant dk$. Предполагается, что $f(u, t)$ имеет непрерывные частные производные порядка $2k+1$.

Функции $G_j(u, t)$ в предложенных процессах обладают «сильным свойством $P_I(f)$».

Для различных процессов из I получены оценки быстроты сходимости. В частности, сходимость A-процесса характеризуется соотношением

$$\| y_j(t) - z(t) \| \leqslant LP^{j-1} | t - t_0 |^{2j-1} / (j-1)!,$$

а сходимость итерационного процесса k-го порядка соотношением

$$\| y_j(t) - z(t) \| \leqslant C2^{-j\,(\tau+1)} + 2bK_1^j | t - t_0 |^j / j!$$
$$(L,\ P,\ C \text{ — постоянные}).$$

В добавлении указано как обобщается итерационный процесс I на уравнения в банаховых пространствах (например, на нелинейные интегральные уравнения). *М. А. Красносельский*

902. Об одном способе решения системы линейных алгебраических уравнений, когда обычные методы последовательного приближения неприменимы. Лейдерман Ю. Р., Докл. АН Узб. ССР, 1953, № 1, 8—11

В работе имеется большое число опечаток и небрежностей. В частности, не оговорено, что понимает автор под умножением и делением векторов. Если указанные действия понимать, как действия над отдельными компонентами рассматриваемых векторов [начиная с формулы (5)], то результат работы можно истолковать следующим образом. Известно, что решение системы уравнений $x = \lambda Ax + f$ для значений параметра $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ — наименьший по модулю корень уравнения $|E - \lambda A| = 0$, можно находить как предел последовательности векторов $x_p = \lambda Ax_{p-1} + f$. Устанавливается, что покоординатное применение δ^2-процесса (Фаддеева. В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М.— Л. 1950, 212—216) дает последовательность векторов, сходящуюся к решению в области $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ более широкой, чем область сходимости обычных итераций. Изложение проводится в предположении, что $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Приводится также прием, улучшающий сходимость процесса, аналогичный приему Л. А. Люстерника (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1947, **20**, 44—64). *В. Н. Фаддеева*

903. Экспериментальный анализ промышленной аппаратуры для автоматического регулирования. Лавиль (Analyse expérimentale d'un appareillage industriel en vue de sa régulation automatique. Laville Gaston), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 12, 1236—1238 (франц.)

При исследовании автоматического регулятора возникает задача определения выходного сигнала $\nu(t)$ при единичной функции $\Upsilon'(t)$ на входе. Пользуясь тем, что $\nu'(t)$ является выходным сигналом при импульсе $\Upsilon'(t)$ на входе, и тем, что для заданного входного сигнала $F(t)$ выходной сигнал $f(t)$ выражается через $\nu'(t)$ интегралом Дюгамеля

$$f(t) = \int_0^t F(t-\tau)\,\nu'(\tau)\,d\tau,$$

автор предлагает рассмотреть это представление как интегральное уравнение относительно $\nu'(t)$. Для решения этого интегрального уравнения предлагается по заданным функциям $f(t)$ и $F(t)$ построить описанным ранее (C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 1728) графическим приемом лапласовы изображения $\varphi(i\omega)$ и $\Phi(i\omega)$ для чисто мнимых значений аргумента p. По отношению $\varphi(i\omega)/\Phi(i\omega) = U'(i\omega)$ (в тексте ошибочно указано обратное отношение $\Phi(i\omega)/\varphi(i\omega)$) предлагается тем же графическим приемом определить $\nu'(t)$, воспользовавшись формулой обращения:

$$\nu'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} U'(i\omega)\,d\omega.$$

После этого обычное графическое интегрирование дает возможность определить искомый выходной сигнал $\nu(t)$.

Автор указывает на простоту и удобство применения предложенного им метода в условиях исследования реального объекта. *М. Р. Шура-Бура*

904. Численное интегрирование дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно высшей производной. Вейссингер (Numerische Integration impliziter Differentialgleichungen. Weissinger J.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 1—2, 63—65 (нем.)

Коллатц (Collatz L., Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin, 1951) предложил заменять уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

системой уравнений относительно $y' = t$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t); \quad \frac{dy}{dt} = tf(x, y, t), \qquad (2)$$

где

$$f = -F_t (F_x + tF_y)^{-1}.$$

Автор указывает на упрощения, возникающие при применении к системе (2) разностной схемы Адамса. Кроме того, предлагается использовать метод Адамса для системы (1) с пересчетом y' в каждом узле по методу касательных Ньютона. Даются оценки и обобщения на случай уравнения n-го порядка. *М. Л. Бродский*

905. Об остаточном члене интерполяционных формул. Нивен (On the error term in interpolation formulas. Niven Ivan), Quart. Appl. Math., 1953, **10**, № 4, 397—398 (англ.)

На примере функции $y = f(x) = x + k \sin \pi x$, $x_j = j$ $(j = 0, \ldots, n)$, показывается ненадежность рекомендуемой в некоторых руководствах оценки погрешности интерполяционной формулы Лагранжа при равноотстоящих узлах посредством замены $f^{(n+1)}(\xi)$ какой-либо функцией $\Delta^{n+1} y$. *Е. Я. Ремез*

906. **Заметка об интерполяции. Макл** (A note on interpolation. Muckle W.), Shipbuilder and Marine Engine Builder, 1953, **60**, № 536, 183—185 (англ.)

Вывод элементарных интерполяционных формул и примеры их практического применения.

А. И. Жуков

907. **Одна форма метода Ньютона со сходимостью третьего порядка. Стоун** (A form of Newton's method with cubic convergence. Stone W. M.), Quart. Appl. Math., 1953, **1**, № 1, 118—119 (англ.)

Обычный метод Ньютона решения уравнения $f(x) = 0$ имеет сходимость второго порядка. Известные обобщения этого метода со сходимостью третьего порядка требуют вычисления второй производной от $f(x)$.

Доказывается, что если $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, а $f'(a)$ и $f'(b)$ — одинаковые, то приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$, полученное из квадратного уравнения

$$\frac{f(b)}{x-b} - \frac{f(a)}{x-a} + \frac{f'(b) - f'(a)}{2} = 0,$$

будет иметь погрешность третьего порядка относительно погрешностей a и b.

Следует отметить, что автор не дает процесса третьего порядка, поскольку нет регулярного способа получения последовательно двух разносторонних приближений третьего порядка.

К. А. Семендяев

908. **Деление пополам табличного интервала при данных значениях первой производной. Джеффрис** (Halving the interval in a table when first derivatives are given. Jeffreys Harold), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 1, 128 (англ.)

Приводится без вывода приближенная формула, превращающаяся в равенство для полиномов третьей степени,

$$f\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{2}\{f(0) + f(h)\} - \frac{1}{8}h\{f'(h) - f'(0)\}. \quad (1)$$

Применение к $f(x) = x^4$ дает погрешность в 9 раз меньшую, чем формула Бесселя, использующая вторые разности.

Замечание референта. Формулу (1) вместе с оценкой ее точности можно получить из рассмотрения выражения $\int_{\frac{1}{2}h}^{h} f'(x)\,dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}h} f'(x)\,dx$, применяя к каждому из интегралов формулу Эйлера — Маклорена.

Е. Я. Ремез

909. **Аналитические аппроксимации. Хастингс** (Analytical approximations. Hastings Cecil, Jr.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 69—71 (англ.)

Заметка содержит примеры аппроксимации различных функций при помощи рациональных дробей. Указаны погрешности этих аппроксимаций. В числе аппроксимируемых — функции $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, e^{-x}, неполная гамма-функция и другие, всего 12 примеров. Подобный же список аппроксимаций был опубликован раньше (Math. Tables and other Aids Comput., 1952, **6**, 251—253). Такие публикации будут производиться и в будущем.

А. И. Жуков

910. **Топологические точки зрения в номографии. Егер** (Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie. Jeger M.), Elem. Math., 1953, **8**, № 2, 25—31; № 3, 49—53 (нем.)

Краткое изложение известных результатов (см., напр., Blaschke W., Bol G., Geometrie der Gewebe) о связи между некоторыми топологическими вопросами геометрии и номографией.

С. В. Бахвалов

911 **РЕЦ. Численный анализ. Хартри** (Numerical analysis. Hartree D. R., pp. XIV + 287, Oxford University Press, London, 30 s.) [**Рецензии: Кранк** (Crank J.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, **4**, № 5, 159 (англ.); (**F. H. B.**), Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1953, **79**, № 340, 310—311 (англ.); (**J. C. B.**), Proc. Phys. Soc., 1953, **663**, т. 5, № 2, 435—436 (англ.)]

912 **РЕЦ. Техника вычислений. Минёр** (Techniques de calcul numérique. Mineur Henri, pp. 626, 16 × 25, Librairie Polytechnique Béranger 7.300 F.) [**Рецензия: Кудерк** (Couderc Paul), Ann. astrophys., 1953, **16**, № 1, 62—63 (франц.)]

Книга предназначена для инженеров, физиков, астрономов и отчасти математиков. Каждая из 17 глав написана по одному плану: изложение теории, описание вычислительных схем, численные примеры.

Краткое содержание: интерполирование; интерполирование с неравноотстоящими узлами; вычисление производных и численное интерполирование; решение алгебраических уравнений третьей, четвертой и высших степеней; обращение таблиц; последовательности ортогональных многочленов; интегралы Эйлера; операции над функциями с особенностями; численное интегрирование дифференциальных уравнений; выравнивание таблиц; интерполяция для функций двух переменных.

В. Н. Фаддеева

913 **РЕЦ. Практический анализ. Стаут** (Practical calculus. Stout Claude E., Second Edition, pp. 469, Mc Graw - Hill Book Co., New York, 1952, 6.00 doll.) [**Рецензия:** (R. G. O., W. S. E.), Midwest Engr, 1953, **5**, № 10, 23 (англ.)]

914 **РЕЦ. Графические средства инженерных расчетов. Хёльшер, Арнолд, Пирс** (Graphic aids in engineering computation. Hoelscher R. P., Arnold J. N., Pierce S. H., McGraw-Hill Book Inc., New York, 1952, pp. VIII + 197) [**Рецензия: Панчанг, Рой** (Panchang G. M., Roy S. K.), J. Scient. and Industr. Res., 1953, **12**, № 1, 42 (англ.)]

Книга является пособием по разработке и применению номограмм и счетных линеек.

Содержание: счетные линейки простые и специальные; подбор эмпирических формул по опыт-

ным данным; графическое дифференцирование и интегрирование; элементарный метод построения номограмм из выравненных точек и при помощи определителей, номограмм с подвижными шкалами.
Г. С. Хованский

915 РЖ. **Прикладная номография. Т. 1. Кислер** (Angewandte Nomographie. T. 1. Kiessler Fritz, S. 138 mit. 143 Zeichnungen u. Zahlentaf., W. Girardet, Essen, 1952, geb 18 DM) [Рецензия: **Янс** (Jahns), Glückauf, 1953, 89, № 11/12, 292 (нем.)]

916 РЖ. **Практическое введение в номографию. Шрёдер** (Praktische Einführung in die Nomographie. Schroeder Roland, S. 187, 121 fig., 44 tab., Carl Hanser, München, 1951, 16 DM) [Рецензия: **Мальмквист** (Malmquist Lars), Tekn. tidskr., 1953, **83**, № 20, 438 (швед.)]

917 РЖ. **Номография для технической практики. Мюллер** (Nomographie für die technische Praxis. Müller Alfred, Fachbuchverlag CmbH. Leipzig, S. 267, Abb. 96, 9.80 DM) [Рецензия: Monatsschr. Feinmech. und Optik, 1953, **70**, № 1, 17 (нем.)]

ТАБЛИЦЫ

918. **Обобщенный интегральный косинус Ci(z,α). Крейсиг** (Der allgemeine Integralkosinus Ci(z,α). Krevszig E.), Acta math., 1953, 89, № 1—2, 107—131 (нем).

Рассматривается функция комплексного переменного

$$\mathrm{Ci}(z, \alpha) = \int_0^z \frac{\cos t}{t^{\alpha}}\, dt \qquad (\alpha < 1).$$

Даются разложения Ci(z, α) в степенной ряд и в бесконечное произведение и асимптотическое разложение для z не чисто мнимых. Кроме того, дано некоторое разложение в ряд разности Ci($z + h$, α) — Ci(z, α), предназначенное для вычисления Ci(z, α) при не очень больших и не очень малых по модулю z.

Исследуется также расположение нулей Ci(z, α). При $\alpha > 0$ действительные нули расположены попарно приблизительно симметрично относительно точек $x = (4n + 3)\pi/2$, сближаясь с ростом n и переходя в дальнейшем в комплексно сопряженные пары.

Настоящая работа тесно связана с работой того же автора (Acta math., 1951, 85, 117—181), в которой рассматривается обобщенный интегральный синус

$$\mathrm{Si}(z, \alpha) = \int_0^z \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\, dt \qquad (\alpha < 2).$$

В конце приведены таблицы действительной и мнимой части Ci(z, α), $z = x + iy$ для $\alpha = 0{,}25\,(0{,}25)\,1$, $x = 0\,(1)\,20$, $y = 0\,(1)\,5$ с 2—3 значащими цифрами; для $y = 0$ даны 3 десятичных знака при $x = 0\,(0{,}2)\,4\,(0{,}5)\,20$; для $\alpha = 0\,(0{,}25)\,0{,}75$—первые три пары нулей. Кроме того, даны чертежи рельефов Ci(z, α) для $\alpha = 0\,(0{,}25)\,0{,}75$ и еще некоторые вспомогательные таблицы.
К. А. Семендяев

919. **Таблицы полных эллиптических интегралов. Хаммерсли** (Tables of complete elliptic integrals. Hammersley J. M.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **50**, № 1, 43 (англ.)

Даны таблицы значений полных эллиптических интегралов первого и второго рода K и E, а также величины $\frac{\pi}{2K}$ с десятью десятичными знаками (последний сомнительный) по аргументу $\frac{1}{k}$ от 1,00 до 1,30 через 0,01 и от 1,30 до 2,00 через 0,02.
К. А. Семендяев

920. **Таблицы и приближенные формулы для гипергеометрических функций высокого порядка, встречающихся в теории газовых потоков. Черри** (Tables and approximate formulae for hypergeometric functions, of high order, occurring in gas-flow theory. Cherry T. M.), Proc. Roy. Soc., 1953, A**217**, № 1129, 222—234 (англ.)

При расчетах стационарных газовых потоков методом годографа употребляются ряды, содержащие гипергеометрические функции F ($\nu - a_\nu$; $\nu - b_\nu$; $\nu + 1$; τ), F (a_ν, b_ν; $\nu + 1$; τ) и их производные по τ. Здесь $a_\nu + b_\nu = \nu - 1/(\gamma - 1)$, $a_\nu b_\nu = \nu\,(\nu + 1)/2\,(\gamma - 1)$, $\gamma = 1{,}4$ (показатель адиабаты). Вводятся вспомогательные функции, по значениям которых легко вычисляются значения основных функций. Вспомогательные функции обладают плавным ходом. Для них приводятся: 1) таблица значений для $\tau = 0{,}08\,(0{,}02)\,0{,}30$ и $\pm\nu = 10{,}5\,(1{,}0)30{,}5$ с 4—6 значащими цифрами, 2) приближенные формулы для больших значений $|\nu|$ и таблица коэффициентов, встречающихся в этих формулах, для $\tau = 0{,}08\,(0{,}02)\,0{,}30$.
А. Л. Брудно

921. **Функции Струве порядка 3/2** (Struve function of order three-halves), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **50**, № 1, 21—29 (англ.)

Функции Струве полуцелых порядков определяются так: $H_{1/2}(x) = [2/(\pi x)]^{1/2}(1 - \cos x)$; $H_{3/2}(x) = [x/(2\pi)]^{1/2}[1 + 2/x^2 - \sin x - (\cos x)/x]$;

$$H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) = (2\nu/x)\,H_\nu(x) + (\nu/2)^\nu : [\Gamma(\nu + 3/2)\,\Gamma(1/2)].$$

При помощи соотношения $h_\nu(x) = (2\pi/x)^{1/2} H_\nu(x)$ переходим к функциям, для которых $h_{1/2}(x) = (2/x)(1 - \cos x)$; $h_{3/2}(x) = 1 + 2/x^2 - (2/x) \times [\sin x + (\cos x)/x]$; $h_{\nu-1}(x) + h_{\nu+1}(x) = (2\nu/x)h_\nu(x) + (x/2)^{\nu-1/2} : (\nu + 1/2)!$; $h_{3/2}(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$; $h_{3/2}(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

В статье приведена таблица значений $h_{3/2}(x)$ для $x = 0\,(\cdot 02)\,15$ с десятью знаками после запятой и таблица вторых разностей δ^2. Квадратичная интерполяция обеспечивает точность последнего знака до единицы.
А. Л. Брудно

922. **Нули производных бесселевых функций дробного порядка. Солзер** (Zeros of the derivative of Bessel functions of fractional order. Salzer Herbert E.), Math. Tables and

other Aids Comput., 1953, 7, № 41, 69—71 (англ.)

Приводится таблица значений нулей и первых производных бесселевых функций $J_\nu(x)$, $\nu = \pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{4}$. Для каждого значения ν даны 7—8 первых нулей с семью десятичными знаками.

А. И. Жуков

923. **Таблица частных Вильсона и значение третьего вильсоновского простого числа. Голдберг** (A table of Wilson quotients and the third Wilson prime. Goldberg Karl), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 2, № 110, 252—256 (англ.)

Частным Вильсона W_p называется наименьший положительный вычет по модулю p отношения $[(p-1)! + 1]/p$, где p — простое. Вильсоновским простым числом называется такое число, для которого $W_p = 0$.

Даны таблицы W_p для $p < 10\,000$, вычисленные на автоматической быстродействующей вычислительной машине СЕАК (SEAC). Вычисление было сделано 2 раза в течение 10 час. При этом обнаружено третье вильсоновское простое число $p = 563$, кроме ранее известных $p = 5$ и $p = 13$.

К. А. Семендяев

924. **Таблица простых чисел в интервале 12012000—12072060. Палама, Полетти** (Tavola dei numeri primi dell'intervallo 12012000—12072060. Palama Giuseppe, Poletti L.), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 1, 52—58 (итал.)

Приведена таблица 3684 простых чисел, лежащих в интервале 12 012 000—12 072 060. *К. А. Семендяев*

925. **Дополнение к указателю таблиц на перфорированных картах. Бланч, Йовелл** (Addendum to a guide to tables on punched cards. Blanch Gertrude, Yowell Everett C.,) Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 41, 1—6 (англ.)

Приводится дополнение (30 наименований) к указателю таблиц на перфорированных картах, опубликованному в этом же журнале (Math. Tables and other Aids Comput., 1951, 5, 175—212), и ряд поправок к этому указателю. В специальном разделе дополнения перечисляются также те из таблиц на перфокартах (5 наименований), которые находятся еще в процессе изготовления.

Л. Е. Садовский

926 К. **Кэмбриджские статистические таблицы. Линдли, Миллер** (Cambridge statistical tables. Lindley D. V., Miller J. C. P., Toronto, Macmillan Co. of Canada, Ltd., 1953, 50 с.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 1 (библ.)

927 РеЦ. **Формулы и таблицы математической статистики. Граф, Хеннинг** (Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Graf Ulrich, Henning H. J., S. 102, 9 Abb., Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953, 9 DM) [**Рецензия:** Braunkohle, Wärme und Energie, 1953, 5, № 7/8, 153 (нем.)]

См. также 532, 533, 541, 574 К, 594 **РЕЦ**, 668, 720, 741 **РЕЦ**, 760, 786, 829, 846

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

928. **Надежность вычислительной машины. Рич, Ратбон** (Computer reliability. Rich Edwin S., Rathbone Robert R.), Radio and Telev. News., 1953, 49, № 2, 10—12, 31 (англ.)

Данные о надежности электронных вычислительных машин основаны на результатах наблюдений, проведенных в течение 27 месяцев над макетом арифметического устройства машины «Вихрь-1» (Whirlwind-1). Основные характеристики макета: числа представляются в двоичной системе; количество двоичных разрядов 5; запоминающее устройство — на триггерах с применением индикаторных ламп; управление кнопочное от специального генератора импульсов; длительность рабочего импульса 0,1 *мсек*; рабочая частота при автоматической работе 2 *Мгц*.

На макете выполнялось умножение двух пятизначных двоичных чисел, сравнение с правильным результатом в конце каждого действия. Время умножения 8 *мсек*. Число умножений—15 000 в 1 *сек*. Ошибки вычислений регистрируются электромеханическими счетчиками.

Арифметическое устройство состоит из 275 электронных ламп, 350 германиевых диодов, 800 сопротивлений, 675 конденсаторов, 100 импульсных трансформаторов и 80 высокочастотных дросселей. Устройство управления состоит из 100 электронных ламп и приблизительно 950 радиодеталей.

Проверка работоспособности элементов в течение первых 18 месяцев работы макета производилась ежедневно, а в последние 9 месяцев — дважды в неделю. В течение всего периода испытаний велся журнал учета работы макета, кроме того, все данные, относящиеся к надежности работы (наличие ошибок, исправления, результаты проверки и т. п.), ежедневно заносились в рабочую карточку.

В течение 27 месяцев наблюдений зарегистрировано 142 периода работы макета, когда ошибки возникали непрерывно; количество ошибок в пределах одного периода было от единиц до нескольких тысяч. Больше половины периодов ошибок (78) наблюдалось в течение первых 96 дней работы (с 1 апреля по 5 июля 1949 г). При этом почти все ошибки были обусловлены контактными явлениями и носили случайный характер.

5 июля 1949 г. макет был остановлен на ремонт, во время которого были удалены реле и ручные выключатели с плохими контактами, заменены все держатели предохранителей и сменены недостаточно надежные ламповые панели.

В течение первых 96 дней работы макета после ремонта число периодов ошибок сократилось до 7. Наибольший период работы макета без ошибок длился 143 дня (январь — апрель 1951 г.).

За время испытаний было заменено: 154 элек-

тронные лампы, 83 германиевых диода, 2 импульсных трансформатора и 29 из 120 углеродистых сопротивлений. Эти сопротивления требовали допуска менее 1% для применения в триггерах.

При применении систематической проверки работоспособности вычислительных цепей старение электронных ламп, германиевых диодов и радиодеталей не вызывало ошибок в работе макета, так как они заменялись заблаговременно.

Наличие паразитных связей между отдельными элементами вычислительных цепей обусловливало появление ошибок, которые не могли быть обнаружены тестовыми программами в течение почти 3 лет. Эти причины ошибок были обнаружены только в результате тщательных исследований всех электрических цепей.

Предполагается, что результаты исследования макета позволят сконструировать машину «Вихрь-1», содержащую 5000 электронных ламп, так, что она будет в среднем иметь один период ошибок за 20 час. работы. *В. А. Зимин*

929. **Наука и электроника** (Science and electronics), Electrical Engng, 1953, **72**, № 1, 22—24 (англ.)

Краткий обзор результатов, достигнутых в области применений электроники, в частности для вычислительной техники.

Указывается, что в 1952 г. в США вступили в строй три быстродействующие машины с электростатической памятью и машина с памятью на ртутных трубках с автоматическим контролем арифметических операций. Разработан ряд малых машин, в которых магнитный барабан используется как для запоминания, так и для выполнения арифметических операций; число операций от 30 до 100 в 1 сек. Широкое применение германиевых диодов позволило значительно сократить число ламп. Разработаны специальная электроннолучевая трубка для регенеративного запоминающего устройства, диэлектрическое запоминающее устройство и методы использования магнитных элементов для запоминающих устройств и коммутирующих схем. Разработано также большое число элементов, заменяющих триггеры; широко применялись электрические линии задержки.

Разработано двоичное множительное устройство на транзисторах с мощностью потребления меньше 5 *вт* и скоростью перемножения 16-разрядных чисел в 270 *μсек*.

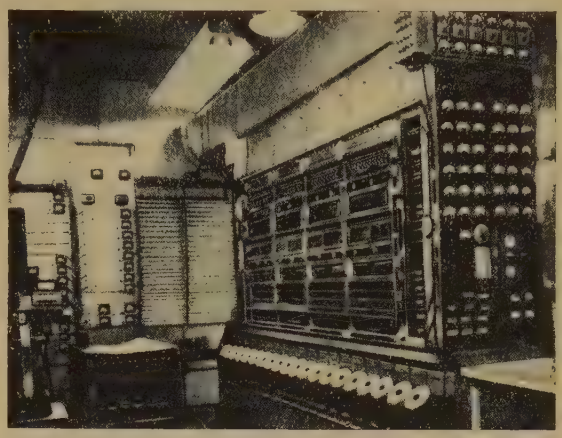
Осуществлен ряд быстродействующих устройств, печатающих более 100 строчек в 1 мин.

Ведется широкая разработка электронных интегрирующих и дифференцирующих устройств для специализированных моделей.

Выпуск на рынок новых магнитных материалов в виде ленты толщиной до 3 μ позволил реализовать такие применения магнитных элементов, в частности в вычислительных машинах, которые ранее были недостижимыми. Большое значение в этих работах имели достижения в разработке теории магнитных усилителей. *И. Я. Матюхин*

930. **Электронная вычислительная машина ИАС** (Electronic computer of the Institute for advanced study — IAS), Electrical Engng, 1953, **72**, № 1, 22—23 (англ.)

Дан общий вид электронной вычислительной машины ИАС (см. фото). Отмечается, что эта оригинальная электростатическая машина является прототипом ряда подобных машин. Машина была введена в действие в 1952 г. через 6 лет после начала работы над ней.



931. **Высшая исследовательская школа в Принстоне. Браун** (Princetown's advanced Research School. Brown Jim), Princeton Engr, 1953, **11**, № 8, 20—21, 42, 43 (англ.)

В статье, имеющей популярный характер, кратко описывается Высший исследовательский институт (Institute for Advanced Study) при Принстонском университете, в частности, вычислительная лаборатория этого института. Лабораторию возглавляет Джон фон-Нейман; в ней построена электронная счетная машина ИАС (IAS computer). Эта двоичная счетная машина имеет запоминающее устройство, состоящее из 40 электроннолучевых трубок, расположенных по 20 штук с обеих сторон машины, внизу. Кроме того, сейчас идет работа по установке магнитного барабана. В машине 2200 ламп; ввод — со стандартных перфокарт ИБМ. Машина занимает площадь в 14 $м^2$ и работает со скоростью ~ 2000 умножений в 1 сек. На машине производятся расчеты в области астрофизики, гидродинамики, динамической метеорологии. Работы в области динамической метеорологии ведутся с целью выработки такой идеализированной модели атмосферы, которая позволяет осуществлять предсказания погоды требуемой точности в пределах достаточно больших воздушных масс. Приведено фото машины (см. реф. 930, фото). *Д. Ю. Панов*

932. **Новая вычислительная машина** (New computer), Phys. Today, 1953, **6**, № 3, 21—22 (англ.)

В январе 1953 г. в Аргонской национальной лаборатории (США) введена в эксплуатацию автоматическая цифровая вычислительная машина АВИДАК (AVIDAC — Argonne's Version of the Institute's Digital Automatic Computer), являющаяся модификацией машины ИАС (IAS). Постройка велась под наблюдением Чжу (J. C. Chu), который во время войны работал над постройкой машины ЭНИАК. Машина используется для работ в области атомной техники и теоретической физики. Сейчас в лаборатории строится вторая машина для Ок-Риджа (Oak—Ridge). Подобная же машина под

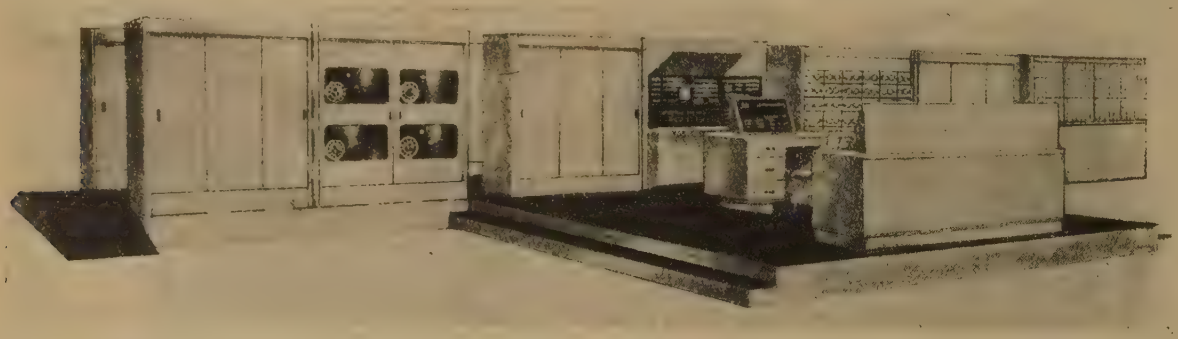
названием МАНИАК (MANIAC) была построена в лаборатории Лос-Аламос (Los Alamos).

Н. Я. Матюхин

933. **Универсальная вычислительная машина ИРА 1103** (ERA 1103 general-purpose computer system), Computers and Automation, 1953, 2, № 3, 36 (англ.)

Объявление фирмы «Ремингтон-Рэнд» (Remington Rand, Inc.) о выпуске универсальной электронной вычислительной машины ИРА 1103 (ERA 1103-Engineering Research Associates, division of Remington Rand, Inc.). В объявлении указывается, что машина оборудована приспособлениями для использования перфокарт, перфолент и магнитных лент, а также быстродействующим печатающим устройством, визуальным графическим индикатором, запоминающим устройством на магнитных лентах и связанными между собой электростатическим запоминающим устройством и устройством на магнитном барабане. В машине принят двухадресный код, включающий как цифровые, так и буквенные данные. Машина имеет приспособления для профилактической проверки и оборудование для кондиционирования воздуха. Приведен общий вид машины (см. фото).

Д. Ю. Панов



934. **УНИВАК, «Ремингтон Рэнд»** (UNIVAC. Remington Rand Inc.,Eckert-Mauchly Division),Proc Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 2, 141 A (англ.)

Объявление фирмы о машине УНИВАК (UNIVAC). Дается общий вид машины (см. фото).

935. **Электронная вычислительная машина ИБМ с программированием на перфокартах. Совак** (Le groupe calculateur électronique IBM à programme par cartes perforées Sauvage A.), Ingrs et techniciens, 1953, 51, 39—41 (франц.)

Рассмотрен пример решения дифференциального уравнения второго порядка на электронной вычислительной машине ИБМ с программированием на перфокартах, краткое описание которой было дано ранее (Ingrs et techniciens, 1952, 50, 27—30).

К. А. Семендяев

936. **Электронная установка для решения дифференциальных уравнений. Саймон, Поплавский** (An electronic differential analyzer. Symon Keith R., Poplawsky Robert P.), Amer., J. Phys., 1953, 21, № 1, 53—61 (англ.)

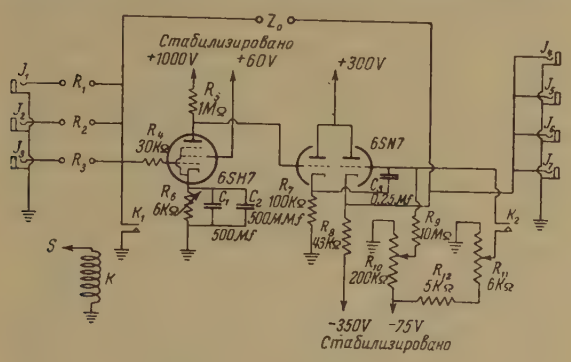
Описывается электронное моделирующее устройство (интегратор) упрощенного типа, предназначенное для приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или их систем до седьмого порядка с нулевыми начальными условиями. Каждая из математических операций выполняется с точностью до 1%. Основное назначение — для учебных целей. Авторы указывают, что стоимость материалов для этого интегратора составила всего 244 доллара.

Интегратор работает в быстром темпе, что позволяет наблюдать решение на экране катодного осциллографа (трубка с послесвечением). Частота повторения решения — 5 раз в 1 сек. Периодизация осуществляется при помощи электромагнитного реле, работающего от мультивибратора. Можно также производить пуск от руки (см. аналогичную работу в Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1947, № 5, 585—596). Периодическое решение с частотой 300 периодов в 1 сек. из-за паразитных емкостей усилителей получается с увеличивающейся амплитудой со скоростью 1% за 0,1 сек.

Усилители переменного тока имеют по одному каскаду усиления напряжения на лампе типа 6SH7. Два последующих каскада на катодных повторителях 6SN7 предназначены для трансформации импеданса и для усиления мощности. Коэффициент усиления без обратной связи около 1200. Усилитель позволяет получить на выходе сигнал до 100 *в* при нагрузке 25 000 *ом*. K_1 и K_2 контакты реле периодизации R_9 и R_{10} служат для компенсации утечки конденсатора C_3. (См. схему усилителя.)

Коэффициенты уравнения изменяются при помощи переменных сопротивлений R от 10^5 до 10^6 *ом*.

На примерах уравнений первого и второго порядка показано, как составить схему по заданному уравнению. Авторы останавливаются на вопросе масштабных преобразований и задании правой



части вида kt^2, $\sin \omega t$ и др. Приведены осциллограммы решений при развертке по времени и на фазовой плоскости $u_2 = f(u_1)$. *Н. В. Кородиков*

937. **Могут ли машины думать?** **У и л к с** (Can machines think? W i l k e s M. V.), Discovery, 1953, **14**, № 5, 151—154 (англ.)

Излагаются общие идеи программирования решения математических задач на автоматических цифровых вычислительных машинах. Сообщается о работе Эттингера, составившего программу для машины ЭДСАК (EDSAC) (Oettinger A. G., Phil. Mag. (7), 1952, **43**, 1243—1263), которая дает возможность машине совершать действия, напоминающие механизм условных рефлексов.

Отмечается, что подобного типа программы позволяют осуществлять лишь такие ответные действия машины, которые заранее предусмотрены составителем программы. *В. И. Шестаков*

938. **Вычислительная машина для фирмы «Шелл».** (Digital computer for Shell), Chem. Age, 1953, **68**, № 1760, 512 (англ.)

Фирма «Ройал Датч Шелл» (Royal Dutch Shell) заказала фирме «Ферранти» (Ferranti) вычислительную машину, которая будет использована для исследовательских работ в области нефтяной промышленности. Заказанная машина — шестая из серии машин, известных под названием «Быстродействующая цифровая вычислительная машина Манчестерского университета» (см. РЖМат, 1953, реф. 477); она будет установлена в научно-исследовательском институте фирмы в Амстердаме. Ее стоимость вместе с установкой и вспомогательным оборудованием составит около 100 тыс. фунтов стерлингов. *Н. Я. Матюхин*

939. **Электронная счетная машина** (Electronic digital computer), Electr. J., 1953, **150**, № 14, 1142 (англ.)

Краткое сообщение о том, что фирма «Ферранти» получила заказ от «Ройал Датч Шелл» на поставку электронной счетной машины (см. реф. 938). Машина вступит в строй в начале 1954 г. *Л. К.*

940. **Собрание ассоциации по вычислительным машинам** (Association for computing machinery), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 57—59 (англ.)

8 и 9 сентября 1952 г. в Торонто состоялось собрание ассоциации по вычислительным машинам в Вычислительном центре Торонтского университета. Участникам собрания были показаны три машины Вычислительного центра: ФЕРУТ (FERUT)— недавно установленная большая машина фирмы Ферранти (Ferranti Limited); УТЭК (UTEC) — моделирующее устройство, построенное в университете, и БЕРТИ (BERTIE)— машина для игры в крестики и нолики.

Программа собрания, в частности, включала следующие доклады: Вычислительная машина МАНИАК (MANIAC); Полиномы Чебышева при решении систем большого числа линейных уравнений; Машины, облегчающие кодирование; Проверка кодирования на вычислительных машинах; Определение масштабов для ввода и вывода данных на двоичных вычислительных машинах с десятичным выводом; Объединение подпрограмм; Ввод табличных функций при программировании; Проектирование автоматических вычислительных машин для Окриджа; Дешевые универсальные вычислительные машины; Моделирующие устройства университета в Торонто; Описание электронной вычислительной машины ИАС; Ошибки при решении систем линейных уравнений методом итерации; Численные решения дифференциальных уравнений в частных производных на электронной машине ИБМ-701; Численные решения волновых уравнений для гелия на Машине СЕАК; Использование непрерывных дробей при вычислении на быстродействующих машинах; Исследование запоминающих устройств с трубками Вильямса; Ферроэлектрики в качестве запоминающих элементов для цифровых машин и переключающих устройств; Экспериментальные образцы запоминающего устройства с малым временем выборки на диодах и емкостях; Быстродействующие выводные печатающие устройства на магнитных элементах; Электронные моделирующие устройства для вычисления корней алгебраических уравнений до 8-й степени.

941. **Распространение электроники в машинах, обслуживающих коммерческие предприятия** (Electronics gains in business-machine field), Electronics, 1953, **26**, № 1, 8 (англ.)

Более тысячи электронных вычислительных перфораторов фирмы «ИБМ», имеющих по 1400 ламп, и около ста электронных вычислительных машин ИБМ с программированием на перфокартах используются деловыми кругами США. Выпущен ряд специализированных машин, в том числе электронная сортировка, сортирующая перфокарты по цифровым и буквенным признакам со скоростью 800 карт в минуту, и вычислительная машина, объединенная с электрической пишущей машинкой, печатающей результаты вычислений со скоростью 10 цифр в 1 сек. *Н. Я. Матюхин*

942. **Генератор знаков для электроннолучевой трубки.** **Н о р в у д** (A symbol generator for cathode ray tubes. N o r w o o d C. W.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 2, 41—47 (англ.)

Описывается прибор, позволяющий воспроизводить на экране электронно-лучевой трубки (э. л. т) цифры, буквы и сочетания из них.

Как известно, под воздействием электрических колебаний, приложенных к обеим парам отклоняю-

щих пластин э. л. т., электронный луч на экране э. л. т. описывает некоторую фигуру, размеры и форма которой определяются амплитудами и сдвигом фаз между этими колебаниями (напр., фигуры Лиссажу). Это используется в схеме генератора, описанного в статье. Путем комбинаций различных элементов в пассивных четырех полюсниках, состоящих из емкостей, индуктивностей, сопротивлений и детекторов, синусоидальное напряжение 10 000 *гц*, подаваемое одновременно на входы всех элементов, изменяется по амплитуде, фазе или форме (посредством детектирования) по-разному в каждом из элементов.

Напряжения, последовательно снимаемые с выбираемых пар выходов элементов, подаются на обе пары отклоняющих пластин э. л. т. Совокупность ряда элементов дает возможность получить на экране э. л. т. буквы, цифры и другие знаки.

Конструктивно элементы формирования букв, цифр или знаков объединяются в небольшие съемные блочки; каждый блочек служит для образования одного знака на экране.

При помощи особой (описанной в статье) системы вращающихся коммутаторов выходы элементов формирования знаков в определенные моменты времени друг за другом подсоединяются к обеим парам отклоняющих пластин. Синхронно с подачей электрических колебаний на пластины трубки к управляющему электроду ее подаются положительные импульсы засвета, также при помощи вращающегося коммутатора. Включая или выключая импульсы засвета, можно установить на экране э. л. т. лишь те знаки, которые необходимы при воспроизведении на экране желаемых слов, либо иных сочетаний знаков.

Вследствие инерции зрительного восприятия и послесвечения экрана наблюдатель будет видеть на экране э. л. т. целые слова или сочетания знаков, хотя электрические колебания, составляющие знаки и линии, подаются на отклоняющие пластины лишь кратковременно. *В. С. Бородин*

943. Электроннолучевая запоминающая трубка. Аллард (Storage cathode-ray tube. Allard L. S.), Wireless World, 1953, **59**, № 2, 95—96 (англ.)

Приведено описание разработанной фирмой «Дженерал электрик» электроннолучевой трубки, предназначенной для употребления в электростатических запоминающих устройствах цифровых электронных счетных машин. Трубка может хранить числа, представленные в двоичной системе. Запись производится расфокусировкой луча. Регенерация записанного числа происходит при движении луча по экрану, причем регенерация должна происходить не реже чем 5 раз в 1 сек.

При рабочем напряжении 1 *кв* диаметр пятна составляет 0,3 *мм*; емкость трубки 2048 знаков (растр 64×32).

Светящийся экран дает возможность визуального наблюдения. *Л. В. Кутуков*

944. Магнитострикционные линии задержки. Эпстейн, Страм (Magnetostrictive sonic delay line. Epstein H., Stram O.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 3, 231—232 (англ.)

Рассматривается магнитострикционная линия задержки из тонкой никелевой трубки. При соответствующем подборе размеров трубки частотная характеристика линии задержки несколько лучше, чем для линии из ленты, ширина которой равна длине окружности трубки. Кроме того, трубка обладает большей механической прочностью и позволяет увеличить магнитную связь с катушкой преобразователя за счет уменьшения воздушного зазора, что уменьшает потери и улучшает общую частотную характеристику. Магнитострикционную линию, кроме использования в запоминающих устройствах, можно применять в качестве регулируемой линии задержки, в качестве распределителя импульсов для преобразования последовательного представления чисел в параллельное и т. д. Приведены краткое конструктивное описание и характеристики линии задержки на 100 *мксек*. Задержка в никелевой трубке составляет ~ 2,1 *мксек/см*, затухание в системе — 40 *дб* (мало зависит от длины трубки), отношение — сигнал: шум на выходе 10 : 1, температурный коэффициент для времени задержки 0,016% на 1°. Оптимальная ширина импульса 1 *мксек*, частота собственного резонанса 600 *кгц*, полоса пропускания 450 *кгц*, наименьший период повторения импульсов 1,6 *мксек*. Разработаны линии задержки на 800 *мксек*. *Н. Я. Матюхин*

945. Преобразователь непрерывных величин в дискретные (Analog-to-digital converter), Instruments, 1953, **25**, № 1, 50 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтед Инжиниринг» (Consolidated Engineering Corp.) о преобразователе САДИК (33—102 SADIC), который преобразует результаты измерений различных стандартных приборов, выраженные в электрических напряжениях, в численные величины с четырьмя десятичными знаками. Численные результаты измерений могут либо автоматически печататься на бумажной ленте, либо пробиваться на перфокартах для использования в дальнейших вычислениях на математических машинах. Кроме того, численные данные передаются на световые панели. Преобразователь САДИК может преобразовывать данные, поступающие от нескольких приборов. Перевод и печатание численных величин осуществляется со скоростью одно число в секунду. Преобразователь снабжен также устройствами для нанесения любой измеряемой величины на график в виде функций от любой другой. Приводится фотография преобразователя. *Е. А. Волков*

946. Преобразователь данных из непрерывной формы в цифровую (Analog-to-digital converter), Mech. Engng, 1953, **75**, № 2, 45 (англ.)

См. реф. 945.

947. Дискретное печатающее устройство для непрерывных входных данных (Digital-printing recorder for analog data inputs), Instruments, 1953, **26**, № 2, 226 (англ.)

Сообщение фирмы «Стритер-Амет» (Streeter-Amet Co.) о регистраторе «Аметрон» (Ametron), который может быть использован для печатания численных значений различных величин, таких как температура, перемещение, скорость и другие, поступающих в виде электрических напряжений. Регистратор может быть приспособлен для печатания несколь-

ких входных данных с указанием времени фиксирования данных и времени появления нулевых значений измеряемых величин, для работы с вычислительными машинами и т. п. *Е. А. Волков*

948. Сообщение о новой десятичной трубке. (Rö—Die Elektro-Spezial-Gmb H...), Elektron, 1953, № 2, 36 (нем.)

Фирма «Электро-специаль» в Гамбурге («Electro-Spezial»-GmbH.) сообщает о новой десятичной счетной трубке, которая вскоре поступит в продажу.

Счетная трубка EIT представляет собой маленькую катодолучевую трубку, в которой плоский электронный луч может занимать 10 устойчивых положений, вследствие чего могут указываться нанесенные цифры от 0 до 9. При каждом поданном на вход трубки импульсе луч двигается в следующее положение, что дает возможность вести счет поступающих импульсов в десятичной системе. Остановившийся у цифры 9 луч с получением следующего импульса падает до цифры 0 и в то же время дает импульс на вход следующей декады. Диаметр колбы — 35 *мм*, длина 75 *мм*.

Трубка может быть использована для построения различных типов счетных устройств и электронных счетных приборов, в которых она может применяться в качестве накапливающего счетчика. Скорость счета до 30 000 импульсов в 1 сек. *В. С. Бородин*

949. Десятичная трубка с прямым чтением результатов подсчета (Tube décimal avec lecture directe du résultat de comptage), Electricité, 1953, **37**, № 193, 15 (франц.)

См. реф. 948.

950. Десятичный счетчик с предварительной установкой (Preset decimal counting unit), Electrical Engng, 1953, **72**, № 1, 26A (англ.)

Даются краткие сведения об электронном десятичном счетчике с предварительной установкой типа 730 фирмы «Беркли» (Berkeley Scientific Co.).

Счетчик работает при скоростях счета до 40 000 импульсов в 1 сек.; разрешающее время не более 5 *μсек*; конструктивно оформлен в виде вставного блока; считает от нуля до заранее установленного числа импульсов, после которого дает выходной импульс.

При помощи дополнительной схемы этот выходной импульс может быть использован для установки счетчика в нулевое положение.

Предварительная установка счетчика производится нажатием одной из десяти кнопок, имеющихся на счетчике. Ряд таких блоков может соединяться последовательно для счета требуемого количества импульсов. *Л. В. Кутуков*

951. Десятичный счетчик (Decimal counting unit), Electronics, 1953, **26**, № 1, 269—270 (англ.)

См. реф. 950.

952. Электронный счетчик (Electronic counter), Analyt. Chem., 1953, **25**, № 3, 42A (англ.)

Фирма «Хейлди Электроникс» (Haledy Electronics Co.) разработала счетчик на лампах с холодным катодом. Счетчик снабжен устройством, позволяющим получать сигнал, вызывающий срабатывание реле, когда счет доходит до какого-либо наперед заданного числа. *Н. Я. Матюхин*

953. Шаговый искатель (Stepping switch), Proc. Inst. Radio Engrs., 1953, **41**, № 1, 51A (англ.)

Реверсивный шаговый искатель состоит из двух электромагнитов и двух храповых механизмов, вращающих выходной вал, на который насажены контактные щетки, перемещающиеся по контактным полям. При срабатывании одного из электромагнитов выходной вал поворачивается в одну сторону, при срабатывании второго электромагнита выходной вал поворачивается в другую сторону. Контактные щетки перемещаются за один шаг на 10°. Типовая модель имеет 4 контактных поля с 12 контактами на каждом.

Реверсивный шаговый искатель может быть использован для дистанционного управления в качестве следящего мотора сервомеханизмов и для преобразования непрерывных величин в дискретные.

В автоматических вычислительных машинах реверсивный шаговый искатель может найти применение в качестве регистра для запоминания кодов или как дифференциальный счетчик поступающих импульсов. *В. И. Рыжов*

954. Полупроводниковые триоды. I. Вводный обзор современных достижений. Роддам (Transistors. I. Introductory survey of recent developments. Roddam Thomas), Wireless World, 1953, **59**, № 2, 70—73 (англ.)

Краткое сообщение об истории полупроводниковых триодов. Автор считает первой публикацией по этому вопросу статью в журнале «Wireless World» за 1924 г., в которой был описан полупроводниковый генератор. Между тем, как известно, первый полупроводниковый генератор был построен в нижегородской лаборатории О. В. Лосевым в 1922 г. (Лосев О. В., Детектор-генератор, детектор-усилитель, Телеграфия и телефония без проводов, 1922, № 14, 37⅓—386).

Далее описываются точечно-контактные германиевые триоды и триоды типа *n-p-n*; приведены некоторые их параметры. Даны элементарные схемы усилителя класса А и генератора. *Н. И. Бродович*

955. Полупроводниковые триоды. Аронсон (Transistors. Aronson Milton H.), Instruments, 1953, **26**, № 2, 252—253 (англ.)

Дается краткое описание принципов действия полупроводниковых триодов двух типов: с точечными контактами и с поверхностными контактами.

Указывается, что полупроводниковые триоды с поверхностными контактами обладают большим коэффициентом усиления тока (до 50 на один каскад) и высоким выходным сопротивлением коллектора. Их характеристики похожи на характеристики пентодов с большим коэффициентом усиления. Полупроводниковые триоды с поверхностными контактами обладают большей емкостью, чем триоды с точечными контактами, и поэтому их применение на больших частотах ограничено. Но они имеют ряд практических преимуществ по сравнению с триодами с точечными контактами: меньший уровень шумов, более высокое выходное сопротивление коллектора, а следовательно, более высокое усиление напряжения и более прочную конструкцию.

Недостатками полупроводниковых триодов по сравнению с электронными лампами являются небольшая выходная мощность, высокий уровень шумов и ограничения в частоте.

Однако полупроводниковые триоды обладают и рядом существенных преимуществ: они имеют небольшие размеры и вес; в отличие от электронных ламп не требуют времени для нагрева и потребления мощности для накала; в отличие от магнитных и диэлектрических усилителей не требуют питания переменным током.

Полупроводниковые триоды были использованы в качестве усилителей, вибраторов и генераторов импульсов при различных частотах до 50 *Мгц*.

Отмечается, что срок службы полупроводниковых триодов превышает 70 тыс. час. и что они способны выдерживать ударную нагрузку, более чем в 20 тыс. раз превосходящую силу тяжести. Проектируются триоды, работающие на частотах до 22 *Мгц*.

В статье приводятся схема усилителя для микрофона и схема вибратора с полупроводниковым тетродом (РЖМат, 1953, реф. 484). *Е. А. Волков*

956. **Свойства некоторых неустановившихся процессов в полупроводниковых триодах. Бассетт, Тилман** (Some transient properties of transistors. Bassett H. G., Tillman J. R.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, **4**, № 4, 116—117 (англ.)

Характеристики импульсных схем с термоионными лампами определяются (наряду с параметрами цепей) свойствами самих ламп. Определяющим фактором является сумма входной и выходной емкости лампы C, отношение которой к проводимости лампы g дает время, близкое к рабочему времени переключения. Время пролета обычно значительно меньше времени переключения. Поэтому им можно пренебречь.

Применение полупроводниковых триодов в импульсных счетных схемах вносит новые факторы в определение рабочего времени переключения и в характеристики схем. Определяющим фактором точечно-контактных триодов является время перехода инъектированных носителей от эмиттера к коллектору. Так как эти носители перемещаются по несколько различным путям, то вызываемое ими изменение тока коллектора не только отстает от изменения тока эмиттера, но и сама форма волны заметно изменяется. Так, например, прямоугольному импульсу тока эмиттера, находящегося под постоянным потенциалом смещения в цепи коллектора, соответствует импульс с почти экспоненциальными передним и задним фронтами, сдвинутый на некоторое время запаздывания (от 0,07 до 0,25 *м/сек* для исследованных образцов). Триоды с поверхностным контактом типа *n-p-n* также обнаруживают запаздывание, но последующее возрастание тока коллектора не имеет экспоненциального характера. Форма волны тока коллектора соответствует предположению о перемещении инъектированных носителей в основном за счет диффузии, а не дрейфа в поле.

Триоды этого типа имеют величины емкостей коллектора и эмиттера относительно базы порядка 10 *пф*, которые могут в свою очередь влиять на характеристики схем.

При работе точечно-контактных триодов в цепях с омической нагрузкой особым случаем является режим так называемого насыщения тока коллектора при больших значениях тока эмиттера. При этом в объем германия инъекцией вводится большое количество неосновных носителей, вследствие чего избыточный ток коллектора может оставаться значительным в течение нескольких микросекунд после исчезновения тока эмиттера. Этот эффект может ограничить возможность использования области насыщения при высоких скоростях счета.

Аналогичные эффекты наблюдаются при подаче импульсного потенциала на коллектор. Если импульс на коллектор подается с некоторым запаздыванием относительно импульса эмиттора, то избыточный ток коллектора появляется немедленно, причем амплитуда импульса тока тем больше, чем меньше запаздывание. Из формы импульсов в этих опытах, а также в опытах с подачей импульсов на коллектор во время импульса эмиттора следует, что перемещение носителей зарядов в точечно-контактных триодах определяется в основном диффузией при малых потенциалах коллектора (менее 10*в*) и дрейфом при больших. *А. В. Ржанов*

957. **Обращение с германиевыми триодами. Тернер** (Care of transistors. Turner Rufus P.) Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 2, 40—41 (англ.)

Чтобы избежать повреждений, необходимо при обращении с германиевыми триодами соблюдать некоторые предосторожности.

Неправильная полярность источника коллекторного напряжения приводит к быстрому выгоранию германиевого триода вследствие чрезмерно большого прямого тока.

Припайка или приварка допускается только для гибких выводов и ни в коем случае не должна применяться в случае игольчатых выводов. Для рассеяния тепла во время пайки и на короткое время после нее гибкий вывод необходимо плотно удерживать плоскогубцами как можно ближе к телу триода. Паять следует быстро и при этом применять возможно большую длину выводов.

Германиевый триод не должен подвергаться скачкам напряжения, превышающим номинальное значение. Схему, содержащую триод, необходимо предварительно опробовать без триода, присоединив заменяющие его сопротивления; после подключения триода следует постепенно повышать напряжения одновременно всех источников питания до требуемых значений.

Для предохранения германиевых триодов от чрезмерных скачков тока необходимо предусматривать ограничивающие ток сопротивления в цепи коллектора и эмиттора.

Нельзя помещать германиевые триоды вблизи элементов, выделяющих тепло. Триоды, работающие при повышенной температуре, не следует нагружать до номинального значения мощности.

Чтобы предотвратить возможные внутренние деформации при механическом монтаже, с германиевым триодом следует обращаться осторожно, избегая чрезмерного сдавливания. *Н. И. Бродович*

958. **Новые области, открывающиеся перед электроникой** (New fields opened up in electronics), Current Sci., 1953, **22**, № 1, 9 (англ.)

Кратко перечисляются возможности электроники, открывающиеся в связи с разработкой германиевых триодов. Отмечается, что мощность, потребляемая одной вакуумной лампой, может привести в действие несколько тысяч германиевых триодов и что германиевые триоды, повидимому, способны

работать гораздо больше, чем лампы (более 100 000 час. вместо нескольких тысяч).

Н. И. Бродович

959. **Германиевые триоды типа *p-n-p*** (Junction transistors), Electronics, 1953, **26**, № 1, 264 (англ.)

Фирмой «Рейтеон» (Raytheon Mfg. Co.) разработаны германиевые *p-n-p* триоды двух типов СК 721 и СК 722. По данным фирмы при температуре 30° триоды имеют на частоте 1000 *гц* уровень шумов 22 *дб*, усиление по мощности соответственно 38 *дб* и 30 *дб*, коэффициент усиления по току 40 и 12 (в схеме с заземленным эмиттором). Характеристики приведены на схеме. Размер триодов примерно 13×6×3 *мм*. Триод СК 722 пущен в серийное производство. *Н. Я. Матюхин*

960. **«Рейтеон» выпустила на рынок под марками СК 721 и СК 722 германиевые *p-n-p*-триоды** ((Rö)— Raytheon bringt unter der Bezeichnung «CK 721» und «CK 722» zwei *PNP*-Germanium-Transistoren auf den Markt), Elektron, 1953, № 2, 37 (нем.)

Приведены данные о германиевых *p-n-p* триодах типов СК 721 и СК 722 фирмы «Рейтеон» (см. реф. 959).

Н. И. Бродович

961. **Выпуск германиевых триодов** (Transistors available), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 2, 86 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Рейтеон» (Raytheon) германиевых *p-n-p* триодов типа СК721 и СК722. Триоды изготовляются с выводами, которые можно припаять, приварить или, предварительно обрезав, вставить в субминиатюрную панель (см. реф. 959, 960). *Н. Б.*

962. **Германиевые триоды** (Transistors), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 2, 188 (англ.)

См. реф. 959, 960, 961.

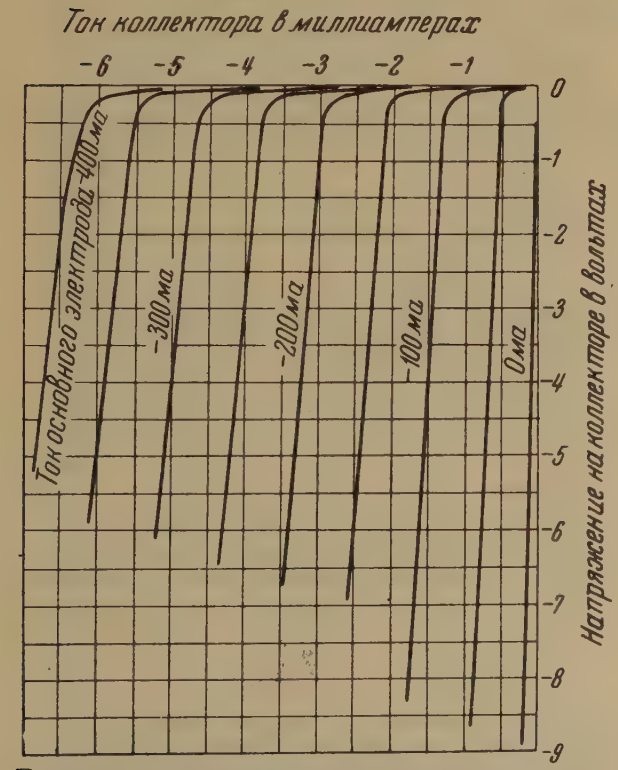
963. **Разработки 1952 г. Германиевый тетрод** (1952 engineering developments. Junction transistor tetrode), Electrical Engng, 1953, **72**, № 1, 3 (англ.)

Схема с экспериментальным германиевым тетродом дает усиление по мощности 11,8 *дб* на частоте 50 *Мгц*, а в качестве генератора работает до 130 *Мгц* (см. РЖМат, 1953, реф. 484).

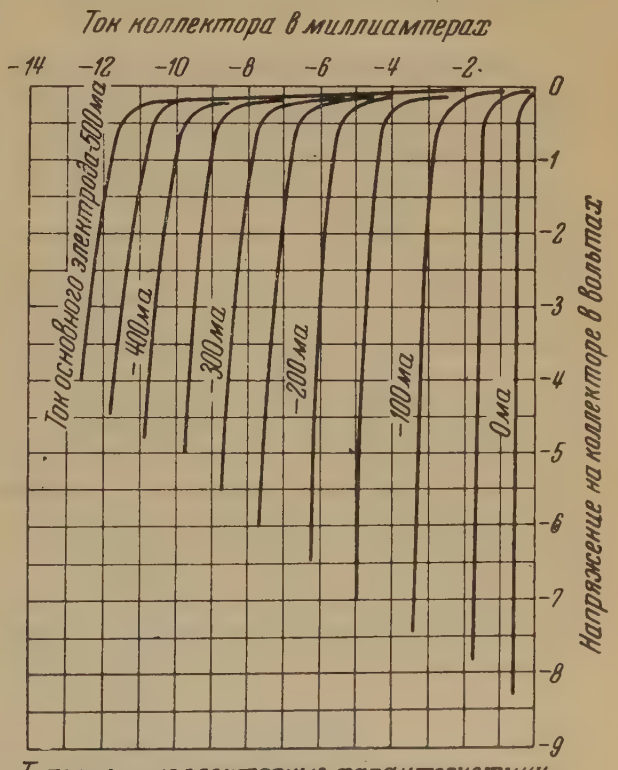
Н. Я. Матюхин

964. **Панели для германиевых триодов** (Transistor sockets), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 2, 126 (англ.)

Фирма «Микалекс» (Mycalex Tube Socket Corp.) извещает о выпуске специальных панелей типа «Mycalex 410» с контактами из латуни или берил-



Типичные коллекторные характеристики СК722



Типичные коллекторные характеристики СК721

К реф. 959

линевой бронзы, предназначенных для германиевых триодов. Дана фотография. *Н. И. Бродович*

965. Новый полупроводниковый триод с поверхностным контактом для высокой частоты (Ein neuer Schicht-Transistor für hohe Frequenzen), Funk-Technik, 1953, **8**, № 2, 60 (нем.)

966. Старые и новые аппараты для механического интегрирования (продолжение и окончание). Эриеман (Anciens et nouveaux appareils mécaniques d'intégration (suite et fin). Eriesmann Th.), Bull. techn. Suisse romande, 1953, **79**, № 5, 61—64 (франц.)

Начало см. РЖМат, 1953, реф. 493. Описываются некоторые современные математические инструменты, улучшенные в конструктивном отношении: полярный планиметр; интегриметр; интегратор для вычисления статических моментов и моментов инерции плоских фигур; интегратор для вычисления интегралов $\int y^{1/2}dx$ и $\int y^{3/2}dx$; интеграф. Даются краткие сведения о двух автоматических интегрирующих приборах, один из которых предназначен для легкого динамометрического вагона, а второй применяется для решения задач, связанных с движением поездов на железных дорогах во Франции. Второй прибор подробно описан Болем (Bohl M. G., La Revue générale des Chemins de fer, 1950, avr., 161—167). Кратко описан прибор для построения баллистических траекторий, построенный для швейцарской армии.

Даны фотографии приборов. *Е. А. Волкова*

967. Новые инструменты для математических вычислений. Дюбуа (Nouveaux appareils pour opérations mathématiques. Dubois Fr.), Génie civil, 1953, **130**, № 7, 123—125. (франц.)

В статье даются описания следующих новых математических инструментов, выпущенных швейцарской фирмой «Амслер»:

1. Прибор для построения средней арифметической двух кривых, строящий кривую $y = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ при одновременном обводе кривых $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$. В основе конструкции лежит шарнирное устройство, известное под названием нюрнбергских ножниц.

2. Профилограф — прибор для построения (по точкам) профиля разреза местности по карте, на которой нанесены линии уровня с постоянным шагом. Для построения требуется вести указатель по карте вдоль линии разреза, отмечая точки встречи с линиями уровня. При этом игла, накалывающая точки профиля, перемещается на пропорциональное расстояние в том же направлении, при каждой отметке сдвигаясь на постоянную величину в перпендикулярном направлении. Смещение иглы в этом направлении осуществляется при помощи электрического привода.

3. Интегриметр — прибор, позволяющий отсчитывать значения интеграла с переменным верхним пределом $\int_0^x f(x)dx$ при обводе графика $y = f(x)$. Конструкция прибора с направляющей линейкой близка к другим известным конструкциям аналогичных приборов.

4. Интеграф больших размеров, допускающий ординаты интегрируемой кривой до $\pm$ 28 *см* и позволяющий получать интегральную кривую отдельными кусками, смещенными относительно друг друга на 25 *см* в направлении оси ординат. Интегрирующее устройство—фрикционное шаровое с зубчатой передачей от интегрирующего диска на записывающий штифт.

Даны фотографии всех описанных инструментов. *К. А. Семендяев*

968. Новые инструменты для математических вычислений. (Продолжение). Дюбуа (Nouveaux appareils pour opérations mathématiques. (Suite). Dubois Fr.), Génie civil, 1953, **130**, № 8, 150—153 (франц.)

Начало см. реф. 967. Описываются следующие математические инструменты, выпущенные фирмой «Амслер»:

1. Две модели моментных планиметров, предназначенные для вычисления интегралов $\int y^k dx$. Одна из них ($k = 1, 2, 3$) представляет собой некоторое конструктивное улучшение хорошо известной модели Амслера, другая ($k = 1, 2, 3, 4$) имеет конструкцию, использующую криволинейные направляющие прорези.

2. Моментный планиметр для $k = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ обычной конструкции с колесным приводом. Рассмотрен пример применения этого прибора при обработке материалов испытаний моделей паровых и газовых турбин.

3. Радиальный аэрологический планиметр, представляющий собой обычный радиальный интегриметр с неподвижным полюсом, снабженный транспортиром с логарифмической шкалой углов и подвижной алидадой, позволяющей строить в полярных координатах кривую $r = f(\log p)$. Прибор служит для вычисления интегралов $\int T\frac{dp}{p}$ при обработке показаний радиозондов. Даны фотографии описанных приборов. *К. А. Семендяев*

969. Пример использования дифференциального анализатора. Мичел (An example in the use of the differential analyser. Michel J. G. L.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 71—72 (англ.)

В статье Спрэга (Sprague R. E., Math. Tables and other Aids Comput., 1952, **6**, № 37, 41—49) приводится схема решения дифференциального уравнения

$$w' - ww' - wt = 0$$

на дифференциальном анализаторе с шестью интеграторами. Автор преобразует это уравнение к виду

$$w' = \int_0^t wd\left(w + \frac{1}{2}t^2\right) + w'(0)$$

и дает схему решения преобразованного уравнения с тремя механическими интеграторами. Для решения приведенного уравнения на дискретном дифференциальном анализаторе потребуется использовать четыре интегратора, так как уравнение нужно будет представить в виде:

$$w' = \int_0^t w\,dw + \int_0^t wd\left(\frac{1}{2}t^2\right) + w'(0).$$

Е. А. Волков

970. **Метод суммирования ряда Фурье на стандартном табуляторе фирмы «Голлерит».** **Кац, Марчингтон** (A method of Fourier synthesis using a standard Hollerith Senior Rolling total tabulator. Kitz N., Marchington B.), Acta crystallogr., 1953, **6**, ч. 4, 325 — 326 (англ.)

Подробно описывается, как стандартный табулятор фирмы «Голлерит» (Standard Hollerith Senior Rolling total tabulator) без всяких дополнительных приспособлений настраивается для вычисления суммы первых 60 гармоник ряда Фурье. Используется стандартная таблица $A\cos nx$, $A\sin nx$ на перфокартах. *А. Л. Брудно*

971. **Интегратор** (Integrator), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 3, 235 (англ.)

См. РЖМат, 1953, реф. 494—498.

972. **Магнитный датчик импульсов. Рутледж** (A magnetic impulser. Routledge C. A.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 301, 118—119 (англ.)

Описан магнитный датчик импульсов для электрических вычислительных машин, работающих с перфокартами и имеющих чувствительные реле и электронные устройства.

Датчик состоит из намагничивающей катушки, четырех импульсных катушек, специального магнитопровода с четырьмя полюсами и железного диска с 16 зубцами. Диск укреплен на оси и может вращаться. На каждом полюсе помещена импульсная катушка. Полюса установлены попарно так, что между каждой парой имеется воздушный зазор.

При вращении диска зубцы поочередно попадают в воздушный зазор между полюсами и, вследствие наличия пазов между зубцами, происходит изменение магнитной проводимости магнитопривода. Это приводит к изменению величины магнитного потока, созданного намагничивающей катушкой, которая питается от источника постоянного тока. В результате изменения магнитного потока в импульсных катушках наводятся положительные и отрицательные импульсы электродвижущей силы.

Обмотки импульсных катушек соединены попарно и последовательно. Одна из пар катушек расположена над зубцами диска, а другая — под его зубцами. Два выходных конца импульсных катушек предназначены для соединения датчика с внешними устройствами. По каждому выходному концу поступают положительный и отрицательный импульсы тока при прохождении одного зубца в воздушном зазоре между соответствующей парой полюсов.

Приводятся две схемы, в которых используется магнитный датчик импульсов. В первой схеме имеется два триода, соединенных в триггерную ячейку. Выходные концы датчика соединены с сетками триодов. Для управления триодами используются положительные импульсы датчика. В анодной цепи одного из триодов включены различные цепи вычислительной машины. При одном обороте диска этот триод отпирается 16 раз, при этом осуществляются необходимые коммутации в цепях вычислительной машины. Для уменьшения числа импульсов тока, получаемых от датчика за время одного оборота диска, предусмотрен специальный кулачковый контакт, замыкающий цепи машины на время прохождения части зубцов диска между полюсами.

Во второй схеме, помимо триггера, управляемого непосредственно от датчика, предусмотрен триггер, состоящий из более мощных триодов. В этом случае возможно производить коммутации цепей, по которым протекает ток в несколько ампер. *В. В. Бардиж*

973. **Производство деталей для табуляторов** (Producing components for tabulating machines), Machinery (London), 1953, **82**, № 2101, 327—335 (англ.)

Рассматриваются некоторые методы штамповки, используемые фирмой «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» (British Tabulating Machine Co.) для производства точных деталей табулятора. В частности, описаны способы применения многоступенчатых штампов для изготовления храповиков цифровых колес и защелок десятичника счетчика табулятора. *Б. М. Дроздов*

974. **Карманная счетная машина для лабораторий** (Pocket calculating machine for laboratories), Discovery, 1953, **14**, № 5, 162—163 (англ.)

См. РЖМат, 1953, реф. 492.

975. **К использованию арифмометра для извлечения корня квадратного. Левшунов М. Т.**, Сб. тр. Ставропольского гос. пед. ин-та, 1953, № 8, 136—143

Описываются три способа извлечения квадратного корня на арифмометре. Первый способ обычный и хорошо известный, основанный на том свойстве, что сумма n нечетных чисел равна n^2.

Автор предлагает для сокращения времени после выделения таким путем k старших значащих цифр корня получать следующие цифры корня на арифмометре при помощи операции деления, пользуясь формулой $\sqrt{N} \approx n_k + (N - n_k^2)/2n_k$, где через n_k обозначено число, составленное из k первых значащих цифр корня $\sqrt{N}$. Второй способ отличается от первого лишь тем, что подкоренное число делится пополам. При этом способе рычаги при последовательном вычитании сдвигаются каждый раз лишь на одну позицию, а не на две, как в первом способе. В этом автор видит преимущество второго способа.

Под третьим способом понимается обычный «школьный способ» извлечения квадратного корня.

Приводится хронометраж, проделанный автором, который показывает, что все три способа требуют для извлечения корня примерно одинакового времени. *Е. А. Волков*

976. **Прибор для перевода чейнов в футы. Керан** (Chain-foot converter. Curran James R.), J. Forestry, 1953, **51**, № 3, 205—206 (англ.)

В англо-американских странах до сих пор иногда употребляется мера длины «чейн» (chain — цепь),

равная 66 футам и подразделяемая на 100 «линков» (link — звено). Чтобы перевести в футы длину, выраженную в чейнах и линках, достаточно выполнить одно умножение на 66; например, 61 чейн 25 линков равны $61{,}25 \times 66 = 4042{,}5$ фута. Автор рекомендует особый прибор (4 подвижных концентрических круга, разделенных каждый на 10 секторов), частично механизирующий это умножение, а именно устраняющий вычисление и запись тех 4 частных произведений, какие получаются при умножении 66 на последовательные 4 цифры данного числа.

Приборы этого типа (примитивные номограммы с подвижными частями) неоднократно предлагались у нас в период перехода к метрической системе мер, но распространения не получили.

В. М. Брадис

977. **Счетная линейка с цветными шкалами** (Color-coded slide rule), Instruments, 1953, **26**, № 1, 64 (англ.)

Сообщается о счетной линейке с некоторыми усовершенствованиями. Шкалы, соответствующие различным тригонометрическим функциям, имеют различные цвета; это исключает частые ошибки, которые возникают при вычислении тригонометрических функций на обычной линейке. Введены шкалы для вычисления кинетической энергии и моментов инерции (шкалы для умножения на квадрат числа) и др.

Приводится фотография части счетной линейки.

Е. А. Волков

978. **От счетных линеек к счетным дискам** (Vom Rechenschieber zur Rechenscheibe. W. D.), Chem. Rundschau, 1953, **6**, № 6, 86 (нем.)

Указывается, что счетные линейки в отношении быстроты и точности вычислений значительно уступают счетным дискам с логарифмической шкалой. Рассматриваются вопросы технологии изготовления таких дисков.

979. **Быстрый счет. Прайс** (Nimble with numerals. Price J. Wylam), Technique, 1953, 28, № 3, 209—211 (англ.)

Статья пропагандирует необходимость применения логарифмической линейки. Приводятся общие сведения о системах логарифмических линеек и некоторые исторические справки. *Е. Я. Ремез*

980. **Механические конторщики** (Mechanical clerks), Research, 1953, **6**, № 4, 129 (англ.)

Утверждается, что применение суммирующих и более сложных вычислительных машин мало изменило характер работы конторских служащих. Наиболее трудной для механизации частью работы, выполняемой конторскими служащими, является сбор первоначальных данных из множества различных документов и перевод их в форму, воспринимаемую машиной.

Существующие быстродействующие автоматические вычислительные машины приспособлены для решения таких задач, которые требуют обширных вычислений при сравнительно небольшом объеме вводимых данных и сравнительно небольшом числе получаемых результатов. Бухгалтерские операции характеризуются, наоборот, многочисленными исходными данными, несложными вычислениями и значительным объемом получаемых результатов. Поэтому потребуется еще большая работа по созданию машин, приспособленных для автоматического производства операций, выполняемых конторскими служащими. *В. И. Шестаков*

981. **Новая промышленная революция. Уэрри** (The new industrial revolution. Werry W. W.), Technique, 1953, **28**, № 3, 199—200 (англ.)

Автор утверждает, что в настоящее время совершается промышленная революция, определяемая широким распространением научных исследований. Главным фактором этой революции является, по мнению автора, широкое распространение и разнообразное применение автоматических вычислительных машин. Отмечается тенденция к уменьшению размеров машин и повышению эффективности их работы за счет использования кристаллических триодов вместо электронных ламп и улучшения запоминающих устройств. В ближайшее время, повидимому, станут доступными малые быстродействующие вычислительные машины.

Указывается на военное применение автоматических вычислительных машин (вычисления, необходимые при стрельбе, при направлении на цель ракет, самолетов и управляемых снарядов) и на возможное применение этих машин для решения чрезвычайно трудоемких математических задач (задачи, связанные с проблемами ядерной физики, статистические исследования в области медицины, напр. для решения проблемы рака).

Автор статьи пользуется ненаучной терминологией, характерной для так называемой «кибернетики». *В. И. Шестаков*

982. **Переключающие устройства как механический мозг. Мекар** (Switching systems as mechanized brains. Meszar John), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 2, 63—69 (англ.)

983 К. **Счетная линейка. Панов Д. Ю.**, изд. 9-е, 128 стр., Гостехиздат, М., 1953

Книга является кратким руководством для самостоятельного овладения методами вычислений на счетной линейке. Книга разбита на два концентра. Первый из них, в котором даются основные сведения о линейке и рассматриваются простейшие задачи, более элементарен и доступен лицам, не знакомым с логарифмами. Во втором концентре рассматриваются действия с тригонометрическими шкалами и обратной шкалой (которая всегда может быть реализована путем переворачивания движка), а также некоторые более специальные задачи, например решение алгебраических уравнений, перевод декартовых координат в полярные и др.

Книга снабжена большим числом наглядных чертежей, значительно облегчающих восприятие материала. Существенным является также наличие большого числа разнообразных примеров и задач.

К. А. Семендяев

984 РЕЖ. **Электронные моделирующие счетные машины. Корн, Корн** (Electronic analog computers. Korn Granino A., Korn Theresa M., pp. XV + 378, Mc Graw-Hill, London, 1952, 7.00 doll., 59 s. 6d).

[**Рецензия: Бут** (Booth A. D.), Proc. Phys. Soc., 1953, **66A**, ч. 5, № 401, 496—497 (англ.)]

985 **П. Электронное запоминающее устройство. Хьюз** (Electronic storage device. Hughes Ernest S., Jr) [International Business Machines Corporation, Нью-Йорк, США]. Пат. США 2628309, кл. 250—27, 10.02.53

Триггерная схема с катодным повторителем в одной из цепей обратной связи, имеющая диодный дешифратор для управления триггером подачей различных уровней напряжения на вход дешифратора. *Н. Я. Матюхин*

986 **П. Контроль ошибок от магнитной ленты. Беркхарт** (Magnetic tape error control. Burkhart William H.) [Monroe Calculating Machine Co., США]. Пат. США 2628346, кл. 340—174, 10.02.53

Запись одних и тех же данных на магнитной ленте производится одновременно в нескольких местах по ширине или длине ленты. Данные считываются также одновременно, и при помощи специального управляющего устройства на выход подается сигнал, полученный от большинства считывающих устройств. *Н. И. Бродович*

987 **П. Электронный цифровой вычислитель** (Electronic digital computer) [The minister of supply]. Австрал. пат. 149567, кл. 05.5, 12.10.49

Блок-схема регенеративного запоминающего устройства на обычной электронолучевой трубке с включенной в цепь регенерации счетной схемой. Эта схема производит перезапись на элементе экрана трубки в соответствии с результатом математического действия над прочитанным сигналом и сигналом от внешнего источника. *Н. Я. Матюхин*

988 **П. Десятичный счетчик с системой индикаторов. Шмидт** (Decimal counting and indicating system. Schmidt Lothar M.) [General Electric Co., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2630969, кл. 235—92, 10.03.53

Устройство представляет собой один разряд десятичного счетчика. Схема работает по пятеричнодвоичной системе счисления. Устройство состоит из четырех каскадов. Каждый каскад построен по схеме, имеющей два стабильных состояния.

С выходов двух первых каскадов на нулевой вход третьего идут цепи переносов. Сигналы, возникающие в этих цепях при переходе триггеров 1-го и 2-го каскадов из положения кода «0» в положение «1» могут устанавливать 3-й каскад только в положение «0». С других выходов всех каскадов, как и в обычных счетчиках, идут цепи переносов на счетный вход следующих каскадов. Импульсы переносов возникают в этих цепях при переходе триггеров из положения кода «1» в положение «0» и могут установить следующие каскады как в положении «1», так и в положении «0». На схеме отсутствует еще одна цепь, без которой устройство не может работать правильно,—цепь, подающая импульс переноса с задержкой с выхода третьего каскада на нулевой вход первого каскада.

Цепи индикаторных лампочек включены таким образом, что при установке на счетчике кода «1» горит первая неоновая лампа, кода «2» — вторая, кода «3» — третья, кода «5» — пятая. Если на счетчике установлен код «6», то горят первая и пятая лампы, если «7», горят вторая и пятая, и т. д. *П. П. Головистиков*

989 **П. Схема счетчика. Вуд** (Counter circuits. Wood Marion L.) [International Business Machines Corporation, Нью-Йорк, США]. Пат. США, 2628310, кл. 250—27, 10.02.53

Электронный счетчик импульсов, каждый разряд которого представляет триггерную схему, состоящую из одного вакуумного и одного полупроводникового триода. *Н. Я. Матюхин*

990 **П. Устройство для получения комбинации импульсов тока. Эрат** (Device for producing current impulse combinations. Ehrat Kurt) [Edgar Gretener, Цюрих, Швейцария]. Пат. США 2 629 012, кл. 178—22, 17.02.53

Электромеханическое устройство, содержащее специальный распределитель и кодирующее устройство. Последнее имеет источник постоянного тока и две группы переключателей тока. При помощи переключателей тока осуществляется набор необходимой комбинации таких импульсов, которые поступают на ламели распределителя. *В. В. Бардиж*

991 **П. Счетная машина с выполнением автоматического умножения** (Regnemaskine til udførelse af automatisk multiplikation) [Aktiebolaget Facit, Атвидаберг, Швеция]. Дат. пат. 75676, кл. 42m — 25,23.03.1953

Описание конструкции известной автоматической счетной машины Facit. *Н. П. Вашкевич*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

992. **Орудие с электронным управлением** (Electronically controlled gun unveiled by the army), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 5, 78 A (англ.)

Приводится краткое описание нового зенитного орудия «Скайсвипер» (Skysweeper), рассчитанного на стрельбу по самолетам, летящим с околозвуковой скоростью на малых и средних высотах. Указывается, что орудие снабжено электронным вычислительным устройством и электронным управлением. Вычислительное устройство автоматически вычисляет дальность, скорость и курс цели, получая данные от радиолокатора, который просматривает небо 1 раз в 40 сек. Темп стрельбы — 45 выстрелов в 1 мин. После открытия огня орудие работает автоматически.

993. **Материалы по нефтяной промышленности на перфокартах. Гатри, Эймикс, Мур, Робинсон, Котара, Уоллес** (A petroleumengineering file... on punched cards. Guthrie R. K., Amyx J. W., Moore A. M., Robinson W. M., Kotara L., Wallace R. H.), Oil and Gas J., 1953, **51**, № 39, 62—64, 77—78 (англ.)

В общих чертах описывается применение одной нефтяной компанией счетно-аналитических машин для обработки экспериментальных данных, полу-

ченных при исследовании и эксплуатации нефтяных месторождений, и для решения различных задач. Существенно отметить создание картотеки перфокарт, на которые занесены все могущие понадобиться данные, полученные из различных источников. В дальнейшем применение машин обеспечивает получение необходимых выборок и их последующую обработку. Специально отмечаются возможности применения машин для решения таких, например, задач, как определение запасов нефти на данном участке сложного очертания. *К. А. Семендяев*

994. Вычислительное устройство для централизованного контроля качества производственного процесса (Central quality-control computing system), Instruments, 1953, **26**, № 2, 212 (англ.)

Сообщение фирмы «Индастриал Компьютер» (Industrial Computer Corp.) о выпуске нового вычислительного устройства OSR, которое непрерывно указывает величины, характеризующие качественный уровень производственного процесса, сравнивая допускаемое количество брака с фактическим количеством. Вычислительное устройство OSR состоит из главного блока и специальных анализаторов, подобных вычислительному устройству OSP, (см. реф. 995). Главный блок вычисляет отклонения R_1 по формулам:

$$R_1 = R_A - (P \times N)$$

и

$$R_1 = R_A - \left[\left(P + 3\sqrt{\frac{P(1-P)}{N-1}}\right) \times N\right],$$

где R_A — количество фактического брака; P — средний допускаемый процент брака, деленный на 100; N — количество испытанных образцов. Величины R_1, вычисленные таким образом, указываются на шкалах анализаторов. *Е. А. Волков*

995. Вычислительное устройство для централизованного контроля производственного процесса (Central production-control computer and indicator), Instruments, 1953, **26**, № 2, 212 (англ.)

Сообщение фирмы «Индастриал Компьютер» (Industrial Computer Corp.) о выпуске нового вычислительного устройства OSP, которое непрерывно фиксирует отклонения от установленных заранее нормативов, характеризующих производственный процесс. Отклонения указываются на специальной шкале. При отклонении стрелки влево на красную половину шкалы указывается, например, невыполнение нормы, при отклонении стрелки вправо на зеленую половину шкалы дается указание о превышении нормы, среднее положение стрелки соответствует запроектированной норме выработки. Вычислительное устройство построено на принципе сравнения данных, соответствующих запроектированным нормативам, и данных, соответствующих действительным нормативам. *Е. А. Волков*

996. Автоматический распознаватель цифр (Automatic digit recognizer), Bell Labs. Rec., **31**, № 99, 52 (англ.)

Сообщение об устройстве Аудри (Audrey, «automatic digit recognizer» — автоматический распознаватель цифры), различающем цифры от 0 до 9, произнесенные в телефонную трубку.

Действие распознавателя цифр основано на разложении произнесенных звуков по составляющим и сравнении этих составляющих со стандартными составляющими, заранее установленными в электронных запоминающих ячейках устройства.

В результате сравнения зажигается лампочка, пронумерованная произнесенной цифрой. Распознаватель цифр не допускает небрежного произношения или акцента.

Ссылка на статью Дейвиса, Биддулфа и Баласкела (Davis K. H., Biddulph R., Balaskel S., J. Acoustical Soc. Amer., 1952, **24**, № 6, 637—642). *В. С. Бородин*

997. Многоканальные системы связи. Ч. 4. Импульсно-кодовая модуляция. Флад (Time-division multiplex systems. (Part 4). Puls-code modulation. Flood J. E.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 302, 146—150 (англ.)

Дано изложение общих принципов импульсно-кодовой модуляции с двоичным кодом и описание блок-схем трех систем импульсно-кодовой модуляции, в том числе системы, использующей для кодировки специальную электроннолучевую трубку. Изложены соображения об искажениях и помехоустойчивости систем с импульсно-кодовой модуляцией и вкратце разобраны некоторые возможные варианты систем (система с троичным кодом и др.). Приведена большая библиография. *Н. Я. Матюхин*

См. также 911 **РЕЦ**, 923, 925

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

998. К пятидесятилетию Андрея Николаевича Колмогорова. Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 3, 181—188

Краткий обзор деятельности юбиляра. Приложен список его трудов.

999. Николай Тимофеевич Зерченинов. Андронов И. К., Математика в школе, 1953, № 2, 83—84

Некролог памяти методиста-математика Н. Т. Зерченинова (умер 14 сентября 1952 г.).

1000. Наследие Ньютона и Лейбница и работы Эйлера. Лорти (L'héritage de Newton et de Leibnitz et les travaux d'Euler. Lortie Léon), Technique, 1953, **28**, № 4, 239—244 (франц.)

Краткая историческая справка о возникновении анализа бесконечно малых и о работах Эйлера. Новых сведений не содержит, встречаются историко-математические неточности. *С. А. Яновская*

1001. Уильям Кингдон Клиффорд. Ньюман (William Kingdon Clifford. Newman

James R.), Scient. American, 1953, **188**, № 2, 78—82, 84 (англ.)

Очерк жизни и деятельности английского геометра Клиффорда (1845—1879 гг.), содержащий характеристику его воззрений на природу геометрии и значение неевклидовой геометрии. Чисто математические исследования Клиффорда не рассматриваются. *И. Г. Башмакова*

1002. Итальянский перевод произведений Архимеда в неизданных бумагах Винченцо Вивиани (1622 — 1703 гг.). **Прочисси** (La traduzione italiana dell Opere di Archimede nelle carte inedite di Vincenzo Viviani (1622—1703). Procissi Angiolo), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 74—82 (итал.)

Описываются неизданные переводы некоторых произведений Архимеда, составленные Винченцо Вивиани и содержащиеся в фонде рукописей «Ученики Галилея», принадлежащем Центральной библиотеке во Флоренции. Сочинения предполагалось расположить в таком порядке: 1) Измерение круга. 2) Квадратура параболы (геометрическим способом). 3) Первая и вторая книги о равновесии. 4) Квадратура параболы (механическим способом). 5) О спиралях. 6) О шаре и цилиндре. 7) О коноидах и сфероидах. 8) О плавающих телах.

Имеются переводы 1, 2 и 4(два последних составляют одно целое в изданиях Архимеда), 3 (только вторая книга), 6, 7 и 8 (только семь предложений первой книги). Из произведений Архимеда, известных в эпоху Вивиани, отсутствуют Псаммит (ввиду его особого характера) и Леммы, опубликованные впервые в 1659 г. и, возможно, еще не известные в эпоху составления плана.

Указывается, что замысел Вивиани остался не доведенным до конца (его перевод кн. 1—6 и 11—12 «Начал» Евклида до середины 19 в. употреблялся в итальянских школах) и что полного итальянского перевода сочинений Архимеда не существует до сих пор. *И. Н. Веселовский*

1003 К. Жизнь и творчество Н. Л. Чебышева. **Отрадных Ф. Н.**, 36 стр., Изд-во «Советская наука», М., 1953

Брошюра представляет собой одну из лекций по истории математики, читанных автором в Ленинградском университете. Материал брошюры в основном взят из статей других авторов, причем в ряде случаев он досадно искажен. *С. А. Яновская*

1004 РЕЦ. Постигаемая бесконечность. К истории математики. **Крбек** (Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik. Krbek F. von, VII + 331 S. mit 128 Abb., Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K. G., Leipzig, 1952, Preis geb., 22 DM) [**Рецензия: Виллерс** (Willers), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 3, 111—112 (нем.)]

См. также 532, 537, 541, 542 **РЕЦ**, 543 **РЕЦ**, 631, 954, 979

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдуссалам 769
Агарвал 675
Агнью 784
Айзакс 785
Айзаксон 544 РЕЦ
Аккерман 547
Аллард 943
Альпер С. Я. 682
Амицур 611
Андерсон 776
Андерсон 849 РЕЦ
Андреев А. Ф. 730
Андронов И. К. 999
Антосевич 726
Арешкин Г. Я. 629 Д
Арнолд 917 РЕЦ
Аронсон 955
Ахмедов К. Т. 770

Б

Бабич В. М. 645
Баева Н. В. 605 Д
Бакли 717
Банкрофт 849 РЕЦ
Барнс 555, 556
Бассетт 956
Бейкер 825
Бер 598
Березина Л. Я. 878
Беркхарт 986 П
Берман Г. Н. 789 К
Бермант А. Ф. 1791 РЕЦ
Берр 850 РЕЦ
Бибербах 694
Бильгер 863
Бланч 925
Блум 669
Боас 647, 692, 693
Борель 553
Ботт 583
Бохнер 704
Брандт 592
Браудер 748, 751
Браун 594 РЕЦ
Браун 930
Браунер 869
Брауэр 601
Бреннан 873
Брунк 783
Брустер 746
Булиган 857 **РЕЦ**, 879
Бурдина В. И. 724
Буржен 823
Бут 984 РЕЦ
Бюкнер 773 РЕЦ
Бюрга 736
Бюро 754

В

Вазов 896
Валирон 780
Ван-дер-Поль 534
Ван Юн-чжоу 892
Варга 901
Варт 894
Вебер 793 РЕЦ
Вейзе 549 РЕЦ
Вейссингер 904
Векуа И. Н. 709
Вернот 670 РЕЦ
Вигман 585
Викторовский Е. Е. 713
Виландт 587
Виланский 643
Вилла 872, 859 **РЕЦ**,
Виллерс 794 **РЕЦ**, 1004 **РЕЦ**
Вильсон 695
Винклер 848
Винтнер 729, 871, 885, 886, 887
Вот 820
Вуд 989 П
Вулф 617
Вулф 763
Вурком 845

Г

Габисония О. Д. 806 Д
Гал 808
Гантмахер Ф. Р. 593 К
Гарнье 731
Гатри 993
Гаучи 588
Гельфонд А. О. 738
Гибс 855 **РЕЦ**
Гидзетти 673
Гильберт 856 РЕЦ
Гладкий А. В. 651 Д
Голдберг 923
Голубев В. В. 739 К
Гофман 587
Гофман 640
Градштейн И. С. 732
Граф 927 РЕЦ
Граффи 859 РЕЦ
Гримшоу 597 РЕЦ
Гудман 690
Гудстейн 866
Гулден 843 РЕЦ

Д

Давенпорт 558
Дадунашвили С. А. 545 Д
Дай 822
Далла Вольта 890
Данжуа 633, 634
Дафф 757
Даффин 583
Дедеккер 624
Дей 597 РЕЦ
Дейвис 668
Де Кастро 723
Декомб 562
Дечикко 858 РЕЦ
Джефрис 908
Джонс 716
Дзядык В. К. 662
Дхананда 828
Дикинсон 626
Диксмье 816
Дисс 537
Домшлак Ю. И. 870
Дрегер 549, **РЕЦ** 575
Дуб 831 К
Дун Хуай-юнь 644
Дынкин Е. Б. 827
Дьюбиш 543 **РЕЦ**
Дюбуа 967, 968

Е

Егер 910
Еклин 782, 844 **РЕЦ**

Ж

Жермэ 772

З

Зауэр 765 **РЕЦ**
Зелинский 576 **РЕЦ**
Зильберштейн 809
Зморович В. А. 691

И

Ибрагимов И. И. 663
Иванов В. В. 682
Иган 586
Иглиш 737
Инграм 586
Ионеску 781

Й

Йос 793 **РЕЦ**
Йовелл 925

К

Кадуэлл 851
Калуца 793 **РЕЦ**
Кампе де Ферье 752
Капуано 621
Карлиц 565, 566, 567, 568, 589
Карль 794 **РЕЦ**
Касселс 591
Кауфман 719
Келдыш Л. В. 631
Келли 820
Кемпбелл 577

Кемпторн 837, 842 **РЕЦ**
Кендалл 832 **РЕЦ**
Кёниг 649
Керран 976
Кертис 625
Кинг 768
Кинг 850 **РЕЦ**
Кислер 915 **РЕЦ**
Киц 970
Кламкин 582, 786
Кларк 841 **К**
Клейнфелд 614
Кли 893
Ковальский 607
Колупайла 843 **РЕЦ**
Конрад 604
Конфорто 874
Кон-Фоссен 856 **РЕЦ**
Корал 741 **РЕЦ**
Кордемский Б. А. 791 **РЕЦ**
Корн 984 **РЕЦ**
Корн 984 **РЕЦ**
Котара 993
Крамер 542 **РЕЦ**
Кранк 911 **РЕЦ**
Красносельский М. А. 814
Крбек 1004 **РЕЦ**
Крейсиг 918
Крендел 849 **РЕЦ**
Крестенсон 655
Крускал 788
Кубенская И. М. 738
Кудерк 912 **РЕЦ**
Кюлк 609

Л

Лавиль 903
Лайтхилл 765 **РЕЦ**
Ламбин Н. В. 707, 708
Ланг 606
Ларк-Хоровиц 764 **РЕЦ**
Лауффер 861
Лебль 855 **РЕЦ**
Левек 563, 564
Левинов А. М. 870
Левитан Б. М. 734, 753
Левшунов М. Т. 975
Лейбензон Э. Д. 787
Лейдерман Ю. Р. 902
Лейтон 740 **РЕЦ**
Лейхтвейсс 876
Леман 771, 773 **РЕЦ**
Лехто 702
Либер А. Е. 891
Ливели 758
Линдер 844 **РЕЦ**
Линдли 926 **К**
Литлвуд 576 **РЕЦ**
Лозинский С. М. 667
Лорти 1000
Лорх 807
Лохер-Эрист 888 **РЕЦ**
Лузин Н. Н. 790 **РЕЦ**
Лукомская М. А. 747
Лумер 810
Люстерник Л. А. 897
Ляпин Е. 574 **К**
Ляпунов А. А. 632

М

Маделунг 764 **РЕЦ**
Мак-Келви 792 **РЕЦ**
Мак-Кой 610
Мак-Комби 766
Макл 906
Мак-Лафлин 615
Мак-Фадден 657
Мак-Юэн 735
Малер 557
Мальмквист 916 **РЕЦ**
Мандельбройт 679
Маргулис Б. Е. 790 **РЕЦ**
Маркус 639, 714
Марчингтон 970
Маутнер 812
Медведев Ю. Т. 648
Мейер 796, 797
Мейер-Кениг 799
Менгер 543 **РЕЦ**
Месар 982
Мёснер 554
Миллер 595 **РЕЦ**, 858 **РЕЦ**
Миллер 926 **К**
Милс 865
Минёр 912 **РЕЦ**
Минь Сы-хао 572
Мичел 969
Мо Е 802
Мозес 762
Морделл 875 **РЕЦ**
Морий 857 **РЕЦ**
Морита 622
Морри 750
Мохон Рой 839
Моцкин 896
Муле 779
Мур 835
Мур 993
Мураккини 884
Мурнаган 602
Мюллер 917 **РЕЦ**

Н

Нагорный Н. М. 546
Надь 653
Нёйман 832 **РЕЦ**
Нелсон 741 **РЕЦ**
Несмеянов А. Н. 531
Нивен 905
Николас 777
Николеску 535
Нобл 677, 696
Новиков П. С. 631
Номоконов М. К. 774 **Д**
Норвуд 942
Ньюман 628 **РЕЦ**
Ньюман 1001
Ньюнс 683
Нюшелер 864

О

Оби 725
Оллерншоу 852
Опиц 847
Оппенгейм 560, 561
Оградных Ф. П. 1003 **К**

П

Пайпс 720
Палама 924
Панов Д. Ю. 983 **К**
Панчанг 914 **РЕЦ**
Паныч О. И. 755
Пароди 578
Пейеримхофф 800
Перлис 594 **РЕЦ**
Пиконе 900
Пини 744, 749
Пирс 914 **РЕЦ**
Погорелов А. В. 877
Подшевкин Ю. В. 630 **Д**
Полак А. 687
Полетти 924
Поллард 573 **РЕЦ**
Попкен 613
Поплавский 936
Потье 670 **РЕЦ**
Прайс 979
Прасад 660
Прахар 551, 552
Престон 830
Прочисси 1002
Пхакадзе Ш. С. 652 **Д**
Пьяджо 743

Р

Раджагопал 804
Райс 548
Расселл 792 **РЕЦ**
Растон 824
Ратбон 928
Релтон 745
Рикарт 821
Риордан 846
Рисс 603
Рич 928
Робинсон 993
Роддам 954
Родеха 778
Розенберг 615
Рой 914 **РЕЦ**
Рот 815
Рот - Демёль 853
Рудаев А. К. 854 **К**
Рутицкий Я. Б. 814
Рутледж 972

С

Саймон 936
Сан Хуан 686, 698
Сас 616,
Сас 664
Сеге 659
Сегре 875 **РЕЦ**
Сейферт 728
Селе 599
Семенов Н. З. 721
Семянистый В. И. 870
Сер 600
Сибли 580
Сивин 655
Сингх 660
Слободянский М. Г. 898, 899
Смайли 612
Смитис 628 **РЕЦ**
Соваж 935
Сокольников 858 **РЕЦ**
Солзер 922
Спрингер 826
Стаут 913 **РЕЦ**
Сташевская Н. В. 742 **К**
Стернберг 719
Стинрод Н. 627 **К**
Стоун 907
Страбл 642
Страм 944
Стюарт 573 **РЕЦ**
Суньер-и-Балагер 697
Сюн Цзин-лай 699, 700, 701

Т

Танака 680, 681
Тебо 862, 867
Тейлор 636
Тейлор 703
Тейлор 836
Тесье 618
Тернер 957
Тилман 635
Тилман 956
Тиман А. Ф. 656
Тимм 706
Томас 761
Томас 727
Топчиев А. В. 531
Тосар 676
Трон 711 **К**
Турецкий А. Х. 665, 666
Тьеррен 619

У

Уайтман 570
Уилкс 937
Уитфорд 582
Ульянов П. Л. 671 **Д**
Уоллес 993
Уолмсли 658
Уолш 650, 685
Уолш 840
Уотсон 559
Урбан 881
Уэдел 795
Уэйд 595 **РЕЦ**
Уэрри 981

Ф

Фань Цюй 638
Феллер 818
Филлипс 817
Финн 882
Флад 997
Фландерс 569
Флейшер 608
Фолли 741 **РЕЦ**
Фомин С. В. 596 **РЕЦ**
Форстер 759
Форт 718
Фреше 710
Фурх 765 **РЕЦ**

Х

Халмош 810
Хальд 850 **РЕЦ**
Хамакер 838
Хамбергер 597 **РЕЦ**
Хаммерсли 919
Хартли 833
Хартман 722, 729, 813, 871, 885, 886, 887
Хартри 911 **РЕЦ**
Харшиладзе Ф. И. 646
Хастингс 909
Хаупт 575 **РЕЦ**
Хаустон 766 **РЕЦ**
Хауэртон 537
Хёльшер 914 **РЕЦ**
Хеннинг 927 **РЕЦ**
Хёфдинг 834
Хилдебранд 544 **РЕЦ**
Хилле 811
Хорунов Р. 860 Д
Хохшилд 600
Хуа Локен 550, 590
Хуан Чжэн-чжун 889
Ху Хай-чан 760
Хьюз 985 П
Хьюитт 819

Ц

Целлер 803

Ч

Чакветадзе С. С. 712 Д
Чеймберлин 647
Черри 920
Чжан Мин-юн 689
Чжан Ши-сюнь 767

Ш

Шапиро 661
Шарль 584
Швиндт 775
Шеффер 654
Шеффер 810
Шехтер В. 756
Шилд 688
Шилов Г. Е. 596 **РЕЦ**
Ширшов А. И. 620 Д
Шметтерер 842 **РЕЦ**
Шмидов Ф. И. 637
Шмидт 988 П
Шмуц 579
Шнеккенбургер 542 **РЕЦ**
Шортли 895
Шпигель 805
Шрёдер 916 **РЕЦ**
Шриханде 836
Штифель 533
Штолль 705
Штрёэр 883

Щ

Щеглов М. П. 798
Щербаков Р. Н. 880

Э

Эванс 733
Эдмондс 674
Эдмундсон 829
Эдрей 659
Эдуардс 641
Эзрохи И. А. 715
Эзрохи Т. Г. 715
Эймикс 993
Эйткен 581
Экман 623
Эллиотт 684
Эляндт 833
Эпстейн 944
Эрат 990 П
Эрве 678
Эрдёш 571
Эрисман 966

Ю

Юинг 783
Юркат 801
Юсуф-заде Б. М. 672 Д

Я

Янс 915 **РЕЦ**

A

Abdussalam 769
Ackerman W. 547
Agarwal R. P. 675
Agnew R. P. 784
Aitken A. C. 581
Allard L. S. 943
Amitsur S. A. 611
Amyx J. W. 993
Anderson A. G. 776
Anderson R. L. 849 **РЕЦ**
Antosiewicz H. A. 726
Arnold J. N. 914 **РЕЦ**
Aronson M. H. 955

B

Baer R. 598
Baker G. A. 825
Bancroft T. A. 849 **РЕЦ**
Barnes E. S. 555, 556
Bassett H. G. 956
Bieberbach L. 694
Bilger G. 863
Blanch 925
Bloom M. 669
Boas R. P., Jr. 647, 692, 693
Bochner S. 704
Booth A. D. 984 **РЕЦ**
Borel E. 553
Bott R. 583
Bouligand G. 857, 879
Bourgin D. G. 823
Brandt H. 592
Brauer R. 601
Brauner H. 869
Brennan J. G. 873
Brewster J. P. 746
Browder F. E. 748, 751
Brown H. H. 594 **РЕЦ**
Brown J. 930
Brunk H. D. 783
Buckley A. 717
Bückner H. 773 **РЕЦ**
Bureau F. 754
Burgat P. 736
Burkhart W. H. 986 П
Burr I. W. 850 **РЕЦ**

C

Cadwell J. H. 851
Campbell J. G. 577
Carlitz L. 565, 566, 567, 568, 589
Cassels J. W. S. 591
Chamberlin E. 617
Chang Shin-hsun 767
Charles B. 584
Cherry T. M. 920
Chrestenson H. E. 655
Civin P. 655
Clark Ch. E. 841 К
Cohn-Vossen S. 856 **РЕЦ**
Conforto F. 874
Conrad P. F. 604
Coral M. 417 **РЕЦ**
Couderc P. 912 **РЕЦ**
Crank J. 911 **РЕЦ**
Curran J. R. 976
Curtis M L. 625

D

Dalla Volta V. 890
Davenport H. 558
Davis Ph. 668
Day MM. M. 597 **РЕЦ**
De Castro A. 723
Decicco 858 **РЕЦ**
Dedecker P. 624
Denjoy A. 633, 634
Descombes R. 562
Diananda P. H. 828
Dickinson A. 626
Diss C. E. 537
Dixmier J. 816
Doob J. L. 831 К
Draeger 549, **РЕЦ** 575
Dubisch R. 543 **РЕЦ**
Dubois F. 967, 968
Duff G. F. D. 757
Duffin R. J. 583
Dye H. A. 822

E

Eckmann B. 623
Edmonds S. M. 674
Edmundson H. P. 829
Edrei A. 659
Edwards R. E. 641
Egan M. F. 586
Ehrat K. 990 П
Elandt R. 833
Elliott H. M. 684
Epstein H. 944
Erdös P. 571
Erismann Th. 966
Erwe F. 678
Evans R. L. 733
Ewing G. M. 783

F

Fan Ky 638
Feller W. 818
Finn R. 882
Flanders H. 569
Fleischer I. 608
Flood J. E. 997
Folley K. W. 741
Forster H. 759
Fort T. 718
Fréchet M. 710
Furch R. 765 **РЕЦ**

G

Gál I. S. 808
Garnier R. 731
Gautschi W. 588
Germay R. H. 772
Ghizzetti A. 673
Gibbs W. J. 855 **РЕЦ**
Goffman C. 640
Goldberg K. 923
Goodman A. W. 690
Goodstein R. L. 866
Goulden C. H. 843 **РЕЦ**
Graf U. 927 **РЕЦ**
Graffi D. 859 **РЕЦ**
Grimshaw M. E. 597 **РЕЦ**
Guthrie R. K. 993

H

Hald A. 850 **РЕЦ**
Halmos P. R. 810
Hamaker H. C. 838
Hamburger H. L. 597 **РЕЦ**
Hammersley J. M. 919
Hartley H. O. 836
Hartman Ph. 722, 729, 813, 871, 885, 886, 887
Hartree D. R. 911 **РЕЦ**
Hastings C., Jr 909
Haupt O. 575 **РЕЦ**
Henning H. J. 927 **РЕЦ**
Hewitt E. 819
Hilbert D. 856 **РЕЦ**
Hilderbrand F. B. 544 **РЕЦ**
Hille E. 811
Hiong King-lai 699, 700, 701
Hochschild G. 600
Hoeffding W. 834
Hoelscher R. P. 914 **РЕЦ**
Hoffman A. J. 587
Houstoun R. A. 766 **РЕЦ**
Howerton R. J. 537
Hua Loo-keng 550, 590
Hughes E. S., Jr 985 **II**
Hu Hai-chang 760
Hwang Cheng-chung 889

I

Igiisch R. 737
Ingram 586
Ionescu H. M. 781
Isaacs G. L. 785
Isaacson E. 544 **РЕЦ**

J

Jahns 915 **РЕЦ**
Jecklin H. 782, 844 **РЕЦ**
Jeffreys H. 908
Jeger M. 910
Jones C. W. 716
Joos G. 793 **РЕЦ**
Jurkat W. 801

K

Kaluza Th. 793 **РЕЦ**
Kampé de Fyériet J. 752
Kapuano I. 621.
Karl 794 **РЕЦ**
Kaufman H. 719
Kelley J. L. 820
Kempthorne O. 837, 842 **РЕЦ**
Kendall M. G. 832 **РЕЦ**
Kiessler F. 915 **РЕЦ**
King R. 768
King E. P. 850 **РЕЦ**
Kitz N. 970
Klamkin M. S. 582, 786
Klee V. L., Jr 893
Kleinfeld E. 614
Kölupaila S. 843 **РЕЦ**
König H. 649
Korn G. A. 984 **РЕЦ**
Korn Th. 984 **РЕЦ**
Kotara L. 993
Kowalsky H.-J. 607
Kramer E. E. 542 **РЕЦ**
Krbek F., von 1004 **РЕЦ**
Krendel E. 849 **РЕЦ**
Kreyszig E. 918
Kruskal J. B., Jr 788
Kulk W. van der 609

L

Laible Th. 855 **РЕЦ**
Lang S. 606
Lark-Horovitz K. 764 **РЕЦ**
Laville G. 903
Lauffer R. 861
Lehmann N. J. 771, 773 **РЕЦ**
Lehto O. 702
Leichtweiss K. 876
Leighton W. 740 **РЕЦ**
Leveque W. J. 563, 564
Lighthill M. J. 765 **РЕЦ**
Linder A. 844 **РЕЦ**
Lindley D. V. 926 **К**
Littlewood D. E. 576 **РЕЦ**
Livesley R. K. 758
Locher-Ernst L. 888 **РЕЦ**
Lorch E. R. 807
Lortie L. 1000
Lumer G. 810

M

Madelung E. 764 **РЕЦ**
Mahler K. 557
Malmquist L. 916 **РЕЦ**
Mandelbrojt S. 679
Marchington B. 970
Markus L. 639, 714
Mautner F. I. 812
McCombie C. W. 766 **РЕЦ**
McCoy N. H. 610
McEwen W. H. 735
McFadden J. A. 657
McKelvey J. V. 792 **РЕЦ**
McLaughlin J. E. 615
Meijer C. S. 796, 797
Meyer-König W. 799
Mesger K. 543 **РЕЦ**
Meczar J. 982
Michel J. G. L. 969
Miller C. E. 595 **РЕЦ**, 858 **РЕЦ**
Miller J. C. P. 926 **К**
Mills C. N. 865
Mineur H. 912 **РЕЦ**
Moessner A. 554
Mohon Roy P. 839
Moore P. G. 835
Moore A. M. 993
Mordell L. J. 875 **РЕЦ**
Morita K. 622
Morrey C. B., 750
Morrill W. K. 857 **РЕЦ**
Moses H. E. 762
Mo Yeh 802
Motzkin T. S. 896
Muckle W. 906
Mulê G. 779
Müller A. 917 **РЕЦ**
Muracchini L. 884
Murnaghan F. D. 602

N

Sz.-Nagy B. 653
Nelson A. L. 741 **РЕЦ**
Newman M. H. A. 628 **РЕЦ**
Newman J. R. 1001
Newns W. F. 683
Neyman J. 832 **РЕЦ**
Nicholas C. P. 777
Nicolescu M. 535
Niven I. 905
Noble M. E. 677, 696
Norwood C. W. 942
Nüscheler R. 864

O

Obi Ch. 725
Ollernshaw K. 852
Opitz G. 847
Oppenheim A. 560, 561

P

Palama G. 924
Panchang G. M. 914 **РЕЦ**
Parodi M. 578
Pauthier S. 670 **РЕЦ**
Perlis S. 594 **РЕЦ**
Peyerimhoff A. 800
Phillips R. S. 817
Piaggio H. T. H. 743
Picone M. 900
Pierce S. H. 914 **РЕЦ**
Pini B. 744, 749
Pipes L. A. 720
Poletti L. 924
Pollard H. 573 **РЕЦ**
Popken J. 613
Poplawsky R. P. 936
Prachar K. 551, 552
Prasad B. N. 660
Preston G. W. 830
Price J. W. 979
Procissi A. 1002

R

Rajagopal C. T. 804
Rathbone R. R. 928
Relton F. E. 745
Rice H. G. 548
Rich E. S. 928
Rickart C. E. 821
Riordan J. 846
Riss J. 603
Robinson W. M. 993
Roddam Th. 954
Rodeja F., E. 778
Rosenberg A. 615
Rothe E. H. 815
Roth-Desmeules E. 853
Routledge C. A. 972
Roy S. K. 914 **РЕЦ**
Russell H. G. 792 **РЕЦ**
Ruston A. F. 824

S

Salzer H. E. 922
San Juan R. 686, 698
Sauer R. 765 **РЕЦ**
Sauvage A. 935
Schaeffer A. C. 654
Schäffer J. J. 810
Schild A. 688
Schmetterer 842 **РЕЦ**
Schmidt L. M. 988 **II**
Schmutz O. 579
Schneckenburger E. R. 542 **РЕЦ**
Schroeder R. 916 **РЕЦ**
Schwindt H. 775
Segre B. 875 **РЕЦ**
Seifert G. 728
Serre J. P. 600
Shapiro V. L. 661
Shortley G. 895
Shrikhande S. S. 836
Sibley E. H. 580
Silberstein J. P. O. 809
Singh U. N. 660
Smiley M. F. 612
Smithies F. 628 **РЕЦ**
Sokolnikoff I. S. 858 **РЕЦ**
Spiegel M. R. 805
Springer M. D. 826
Sternberg R. L. 719
Stewart B. 573 **РЕЦ**
Stiefel E. 533
Stoll W. 705
Stone W. M. 907
Stout C. E. 913 **РЕЦ**
Stram O. 944
Ströher W. 883
Struble R. A. 642
Sunyer i Balaguer F. 697
Symon K. R. 936
Szász G. 616
Szász 664
Szegö G. 659
Szele T. 599
Sz.-Nagy B. 653

T

Tanaka Ch. 680, 681
Taylor S. J. 636
Taylor H. E. 703

Taylor W. B. 836
Teissier M. 618
Thébault V. 862, 867
Thielman H. P. 635
Thierrin G. 619
Thimm W. 706
Thomas A. B. 761
Thomas J. 727
Thosar Y. V. 676
Thron W. 711 К
Tillman J. R. 956
Tung Huai-yuen 644
Turner R. P. 957

U

Urban A. 881

V

Vaart H. R. van der 894
Valiron G. 780
Van der Pol B. 534
Vaught R. L. 820
Vernotte P. 670 **РЕЦ**
Villa M. 859 **РЕЦ**, 872

W

Wade T. L. 595 **РЕЦ**
Wallace R. H. 993
Walmsley C. 658
Walsh J. E. 840
Walsh J. L. 650, 685
Warga J. 901
Wasow W. 896
Watson G. L. 559
Weber W. 793 **РЕЦ**
Wedel A. M. 795
Weise K. E. 549 **РЕЦ**
Weissinger J. 904
Werry W. W. 981
Whiteman A. L. 570
Whitford D. E. 582
Wiegmann N. A. 585
Wielandt H. W. 587
Wilansky A. 643
Wilkes M. V. 937
Willers Fr. A. 794 **РЕЦ**, 1004 **РЕЦ**
Wilson R. 695
Winkler F. 848
Wintner A. 729, 871, 885, 886, 887
Woerkom A. J. J. van 845
Wolf E. 763
Wolfe J. 617
Wong Yung-chow 892
Wood M. L. 989 **П**

Y

Yowell E. C. 925

Z

Zeller K. 803
Zelinsky D. 576 **РЕЦ**
Zhang Ming-yng 689